



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

# Wytrzymałość Materiałów

## **Skręcanie prętów o przekrojach kołowych**

Siły przekrojowe, deformacja, naprężenia, warunki bezpieczeństwa i sztywności, sprężyny śrubowe.

**Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki**

**Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji**

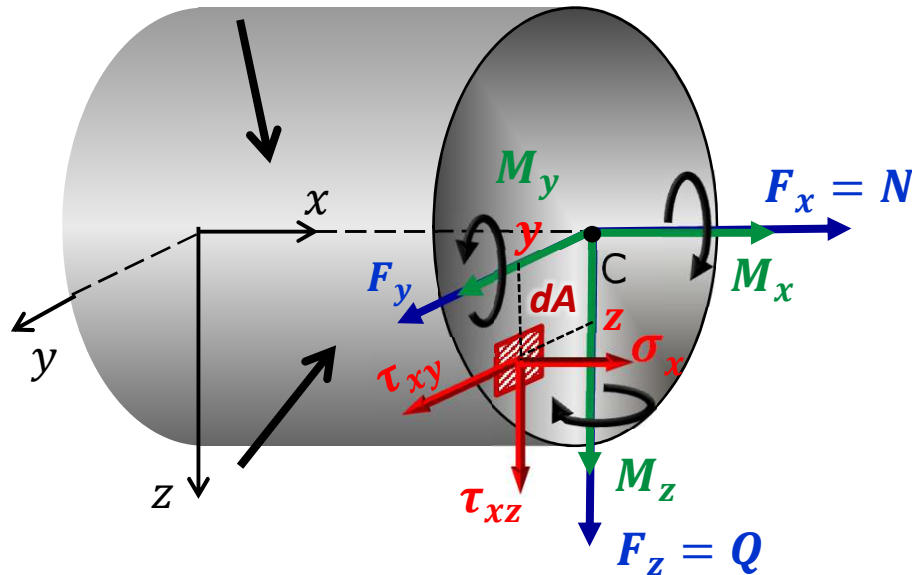
**dr hab. inż. Kinga Nalepka**

**B2, III p., pok. 312**

**e-mail: [knalepka@agh.edu.pl](mailto:knalepka@agh.edu.pl)**

**tel. 12 617 30 98**

# Siły przekrojowe - naprężenia



$$N = \int_A \sigma_x dA \quad - \text{rozciąganie/ściskanie}$$

$$F_y = \int_A \tau_{xy} dA \quad \left. \vphantom{F_y} \right\} - \text{ściananie}$$

$$F_z = \int_A \tau_{xz} dA \quad \left. \vphantom{F_z} \right\} T = \sqrt{F_y^2 + F_z^2}$$

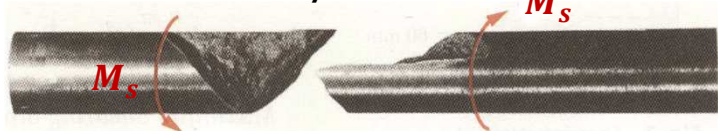
## Ścięcie pręta poddanego skręcaniu

- materiał sprężysto plastyczny



F.P. Beer,  
Mechanics of  
Materials

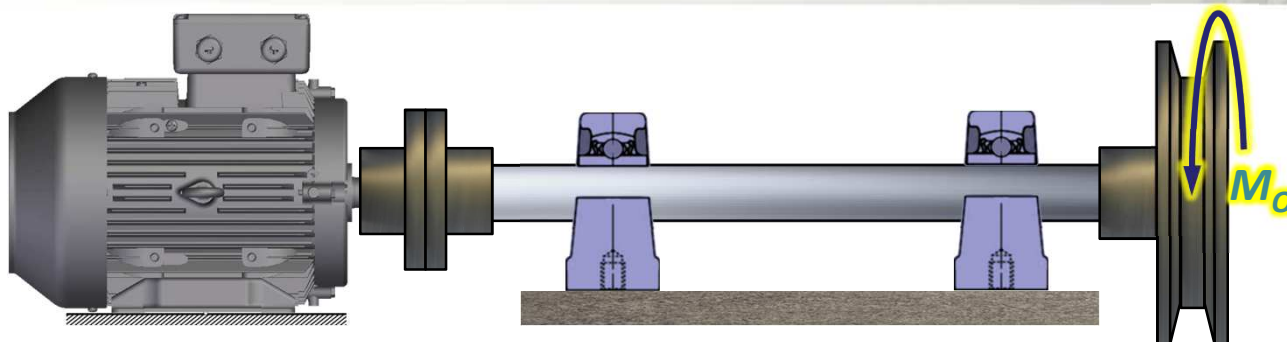
- materiał kruchy



$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA \quad - \text{skręcanie}$$

$$\left. \begin{aligned} M_y &= \int_A \sigma_x z dA \\ M_z &= - \int_A \sigma_x y dA \end{aligned} \right\} - \text{zginanie}$$

## Moment obrotowy – zależności fizyczne



Praca  $W$  wykonana przez moment obrotowy  $M_o$  na kącie obrotu  $\alpha$  [rad]:

$$W = M_o \cdot \alpha$$

$P$  – moc [W=Nm/s]

$\omega$  – prędkość kątowa [rad/s]

$$P = \frac{dW}{dt} = M_o \cdot \frac{d\alpha}{dt} \Rightarrow P = M_o \cdot \omega \Rightarrow M_o = \frac{P}{\omega}$$

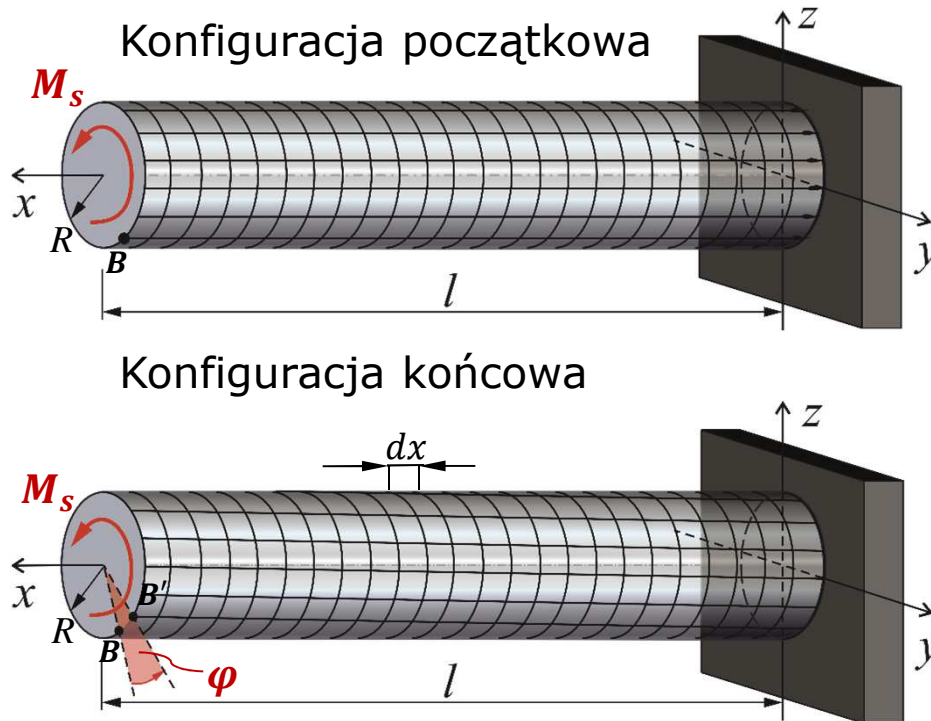
$N$  – moc [kW]

$n$  – prędkość obrotowa [obr/min]

$$M_o = \frac{N \cdot 10^3 \text{ [W]}}{n \frac{2\pi \text{ [rad]}}{60 \text{ [s]}}} \Rightarrow M_o = \frac{30 \cdot 10^3 N}{\pi n} \left[ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\frac{\text{s}}{\frac{1}{\text{s}}}} \right]$$

$$M_o \cong 9550 \frac{N}{n} \text{ [N}\cdot\text{m]}$$

# Odształcenie postaciowe



Prosty pręt pryzmatyczny o kołowym przekroju poprzecznym utwierdzony na jednym końcu (cała ścianka poprzeczna) obciążono na swobodnej ścianie parą sił o momencie  $M_s$ .

- Pomijamy siły masowe.
- Oś x wzdłuż osi pręta, a y i z stanowią osie główne centralne przekroju poprzecznego.

## Odształcenie postaciowe ( $\gamma$ )

Kąt o jaki zmieni się kąt zawarty pomiędzy dwoma włóknami materialnymi przechodzącymi przez wspólny punkt, które przed przyłożeniem obciążenia były wzajemnie prostopadłe.

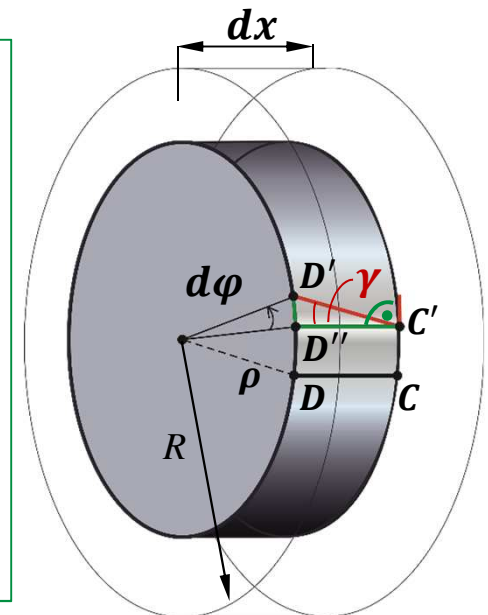
$$\gamma \approx \tan \gamma = \frac{\overline{D'D''}}{\overline{C'D''}}$$

$$\overline{D'D''} = \rho d\varphi$$

$$\overline{C'D''} = dx$$

$$\Rightarrow \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$

**$\varphi$  – kąt skręcenia**



# Naprężenie styczne

Kąt skręcenia rośnie liniowo wraz z odległością od utwierdzenia:

$$\varphi(x) = \theta \cdot x \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \theta, \quad \gamma = \theta \cdot \rho \quad (4.1)$$

Zgodnie z prawem Hooke'a, naprężenie styczne jest proporcjonalne do odkształcenia postaciowego:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad G - \text{moduł sprężystości poprzecznej (moduł Kirchhoffa)}$$

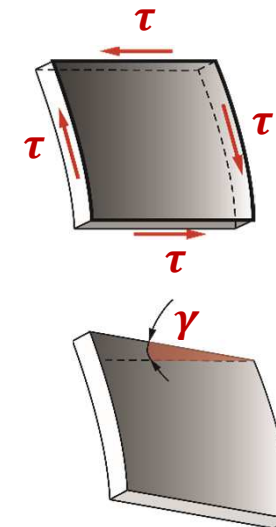
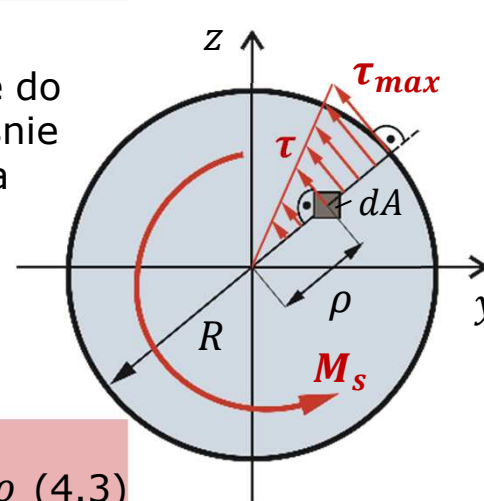
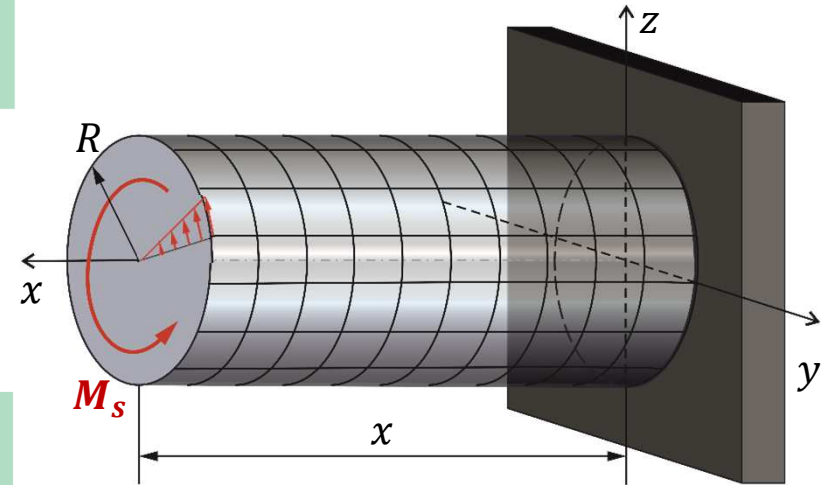
$$\tau = G \cdot \theta \cdot \rho \quad (4.2)$$

Naprężenie styczne jest skierowane prostopadle do promienia wodzącego rozważanego punktu i rośnie proporcjonalnie wraz z długością tego promienia

$$M_s = \int_A \tau \cdot \rho dA \stackrel{(4.2)}{\Rightarrow} M_s = G\theta \int_A \rho^2 dA$$

$$J_0 = \int_A \rho^2 dA \rightarrow \theta = \frac{M_s}{GJ_0}$$

$$\text{Zgodnie z (4.1) oraz (4.2):} \quad \gamma = \frac{M_s}{GJ_0} \rho, \quad \tau = \frac{M_s}{J_0} \rho \quad (4.3)$$



# Warunek bezpieczeństwa

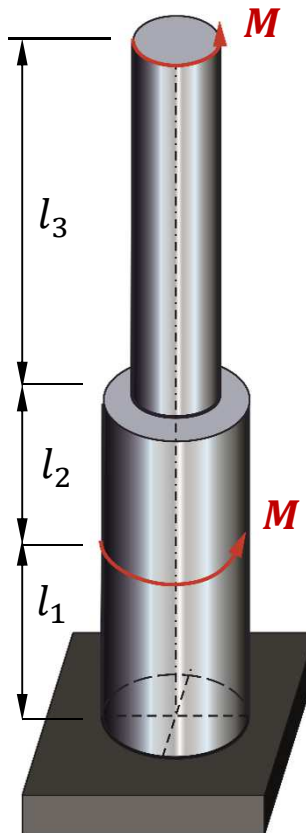
$$\tau_{max} = \frac{M_x}{J_0} \rho_{max}$$

$M_x$  - moment skręcający  
 $J_0$  - biegunowy moment bezwładności.

$\rho_{max}$  - odległość krawędzi zewnętrznej przekroju od jego środka ciężkości.

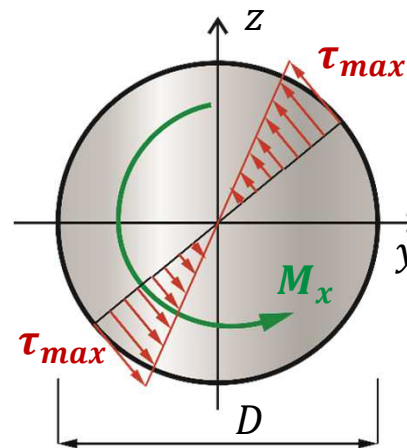
$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_0} \leq k_s, \quad W_0 = \frac{J_0}{\rho_{max}}$$

$k_s$  - dopuszczalne naprężenie przy skręcaniu.  
 $W_0$  - wskaźnik wytrzymałości przekroju przy skręcaniu.



**Wskaźniki nie są addytywne**

## przekrój kołowy



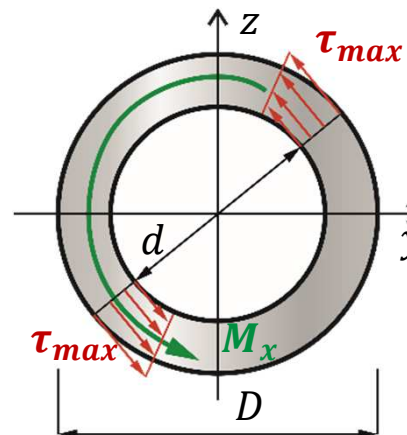
$$J_y = J_z = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$J_0 = J_y + J_z = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$W_0 = \frac{J_0}{D/2}$$

$$W_0 = \frac{\pi D^3}{16}$$

## przekrój pierścieniowy

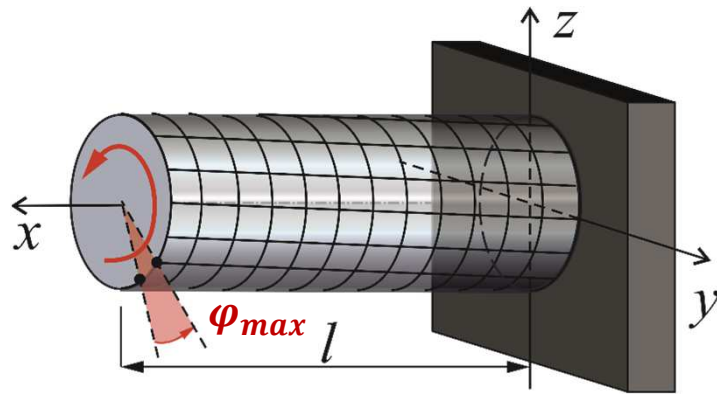


$$J_0 = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32}$$

$$J_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

$$W_0 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D}$$

# Warunek sztywności



Kąt skręcenia rośnie liniowo wraz z odległością od utwierdzenia:

$$\varphi(x) = \theta \cdot x, \theta = \frac{M_s}{GJ_0}, \theta - \text{jednostkowy kąt skręcenia}$$

$$\text{Największy kąt skręcenia: } \varphi_{max} = \varphi(l) = \frac{M_s l}{GJ_0}$$

## Warunki sztywności

$$\varphi_{max} = \frac{M_s \cdot l}{GJ_0} \leq \varphi_{dop}$$

$$\theta = \frac{M_s}{GJ_0} \leq \theta_{dop}$$

gdzie:

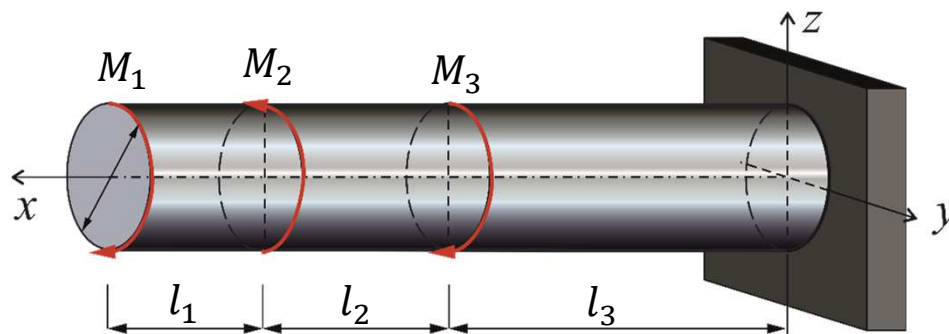
$\varphi_{dop}$  - dopuszczalny kąt skręcenia (rad)

$\theta_{dop}$  - dopuszczalny kąt skręcenia na jednostkę długości (rad/mm, rad/m)

## Przykład obliczeń inżynierskich

Dla pręta stalowego jak na rysunku sporządzić wykresy:

- momentu skręcającego ( $M_x$ ),
- maksymalnych naprężeń stycznych ( $\tau_{\max}$ )
- kąta skręcenia ( $\varphi$ ).



Dane:

$$D = 100 \text{ mm},$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$l_1 = 0.2 \text{ m} \quad M_1 = 5 \text{ kNm}$$

$$l_2 = 0.3 \text{ m} \quad M_2 = 15 \text{ kNm}$$

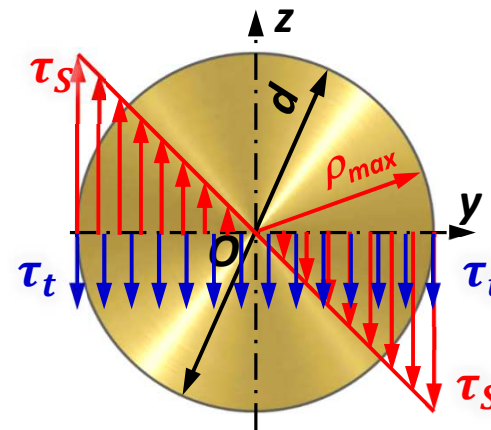
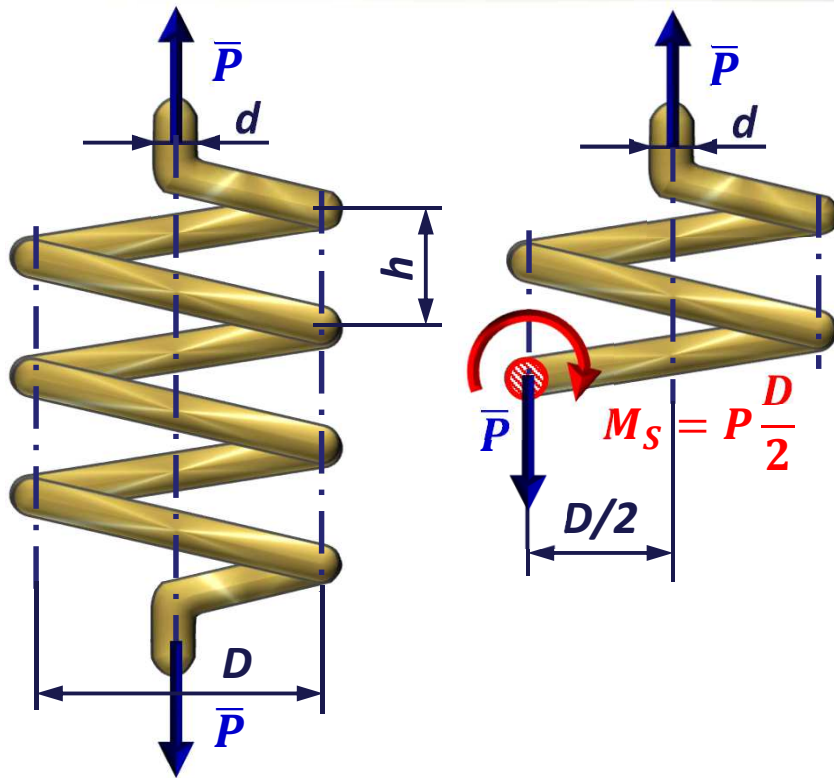
$$l_3 = 0.65 \text{ m} \quad M_3 = 14 \text{ kNm}$$

Szukane:

Wykresy:  $M_S$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\varphi$



# Sprężyny śrubowe o małym skoku - naprężenia, warunek bezpieczeństwa



$$W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$\tau_{max} = \tau_s + \tau_t$$

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_o} = \frac{P \cdot D/2}{\pi \cdot d^3 / 16} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3}$$

$$\tau_t = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi \cdot d^2 / 4} = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2}$$

$$\tau_{max} = \tau_s + \tau_t = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right)$$

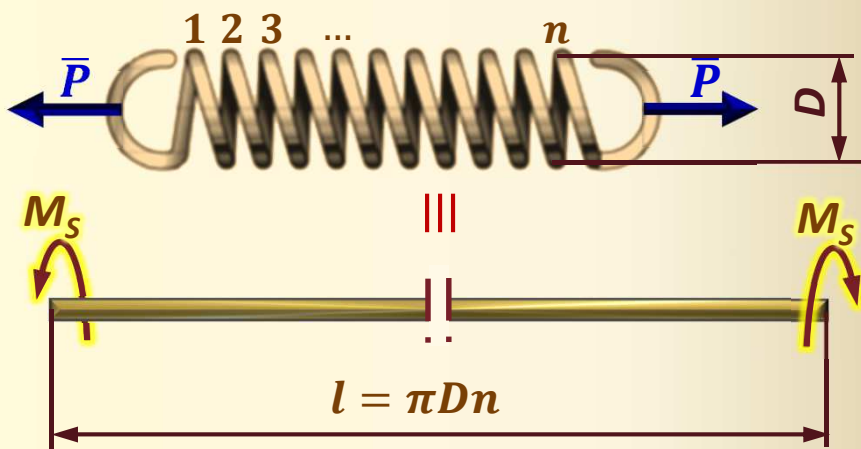
$$\tau_{max} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right) \leq k_s$$

$k_s$  – dopuszczalne naprężenia styczne



# Sprężyny śrubowe o małym skoku – ugięcie ( $\lambda$ )

Energia zmagazynowana w sprężynie ( $E$ )



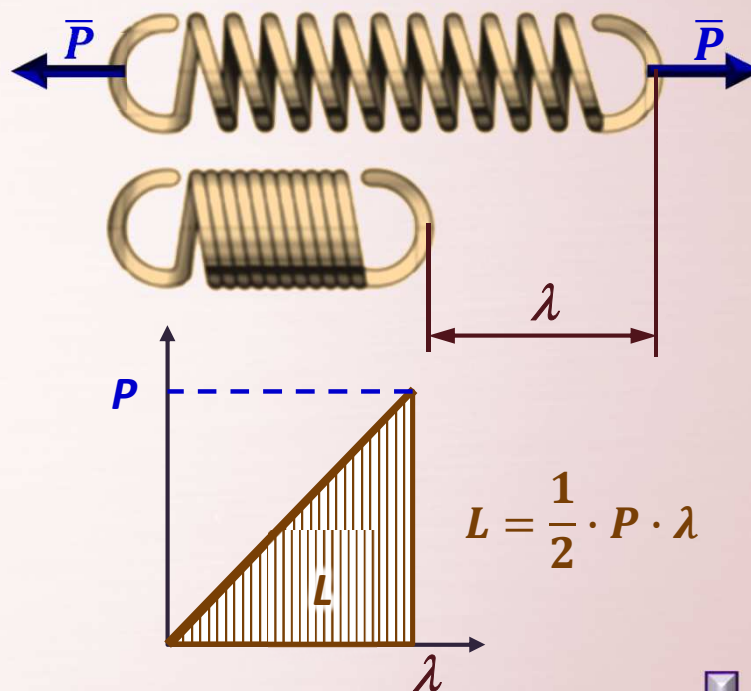
$l$  – długość drutu sprężyny (po rozwinięciu)

$n$  – liczba zwoi,

$$E = \frac{1}{2} \cdot M_S \cdot \varphi \quad \left. \begin{array}{l} E = \frac{M_S^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot J_0} \\ \varphi = \frac{M_S \cdot l}{G \cdot J_0} \end{array} \right\} \dots \quad \left. \begin{array}{l} J_0 = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \end{array} \right\}$$

$$E = \frac{16 \cdot M_S^2 \cdot l}{G \cdot \pi \cdot d^4} \quad \left. \begin{array}{l} E = \frac{4 \cdot P^2 \cdot D^2 \cdot l}{G \cdot \pi \cdot d^4} \\ M_S = P \frac{D}{2} \\ l = \pi \cdot D \cdot n \end{array} \right\}$$

Praca wykonana nad sprężyną ( $L$ )



$$E = \frac{4 \cdot P^2 \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \lambda = L$$

$$\lambda = \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}$$