



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość Materiałów

Płyty kołowe obciążone symetrycznie

Ugięcie, siły przekrojowe, naprężenia

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

dr hab. inż. Kinga Nalepka

B2, III p., pok. 312

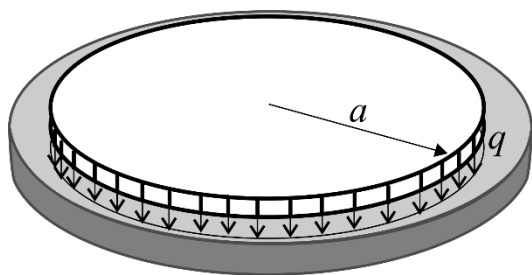
e-mail: knalepka@agh.edu.pl

tel. 12 617 30 98

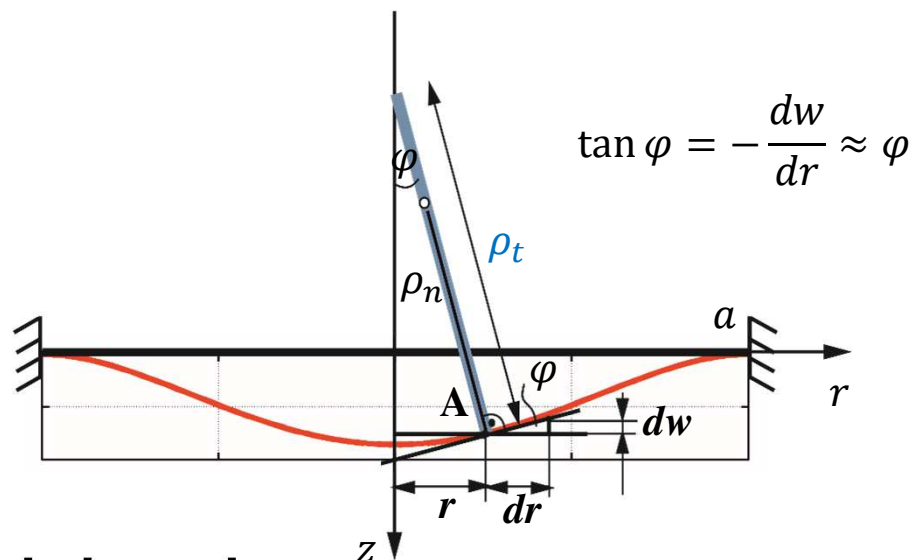
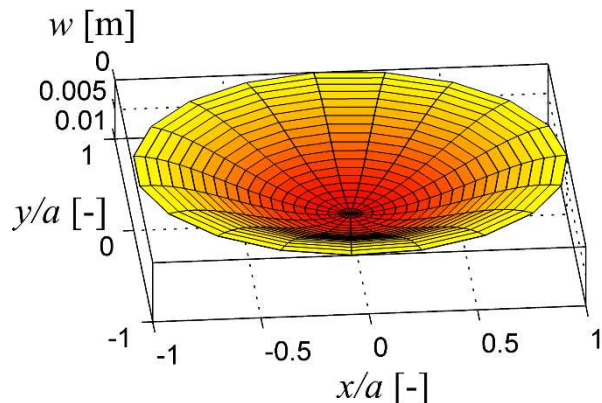
Ugięcie

Płyta – płaski element konstrukcyjny o jednym wymiarze znacząco mniejszym od dwóch pozostałych, obciążony prostopadłe do płaszczyzny środkowej.

Płyta kołowa równomiernie obciążona, utwierdzona na krawędziach zewnętrznych



Ugięcie płyty



Promienie krzywizn:

$$\frac{1}{\rho_n} = -\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{d\varphi}{dr},$$

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{\sin \varphi}{r} \approx \frac{\varphi}{r} \approx \frac{-1}{r} \frac{dw}{dr}$$

Natężenie momentów gnących

Odształcenia w kierunku promieniowym i obwodowym:

$$\varepsilon_r = \frac{z}{\rho_n}, \quad \varepsilon_t = \frac{z}{\rho_t}$$

Naprężenia w kierunku promieniowym i obwodowym:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_n} + \nu \frac{1}{\rho_t} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r) = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_t} + \nu \frac{1}{\rho_n} \right)$$

Moment zginający w przekroju obwodowym M_r i promieniowym M_t na jednostkę długości:

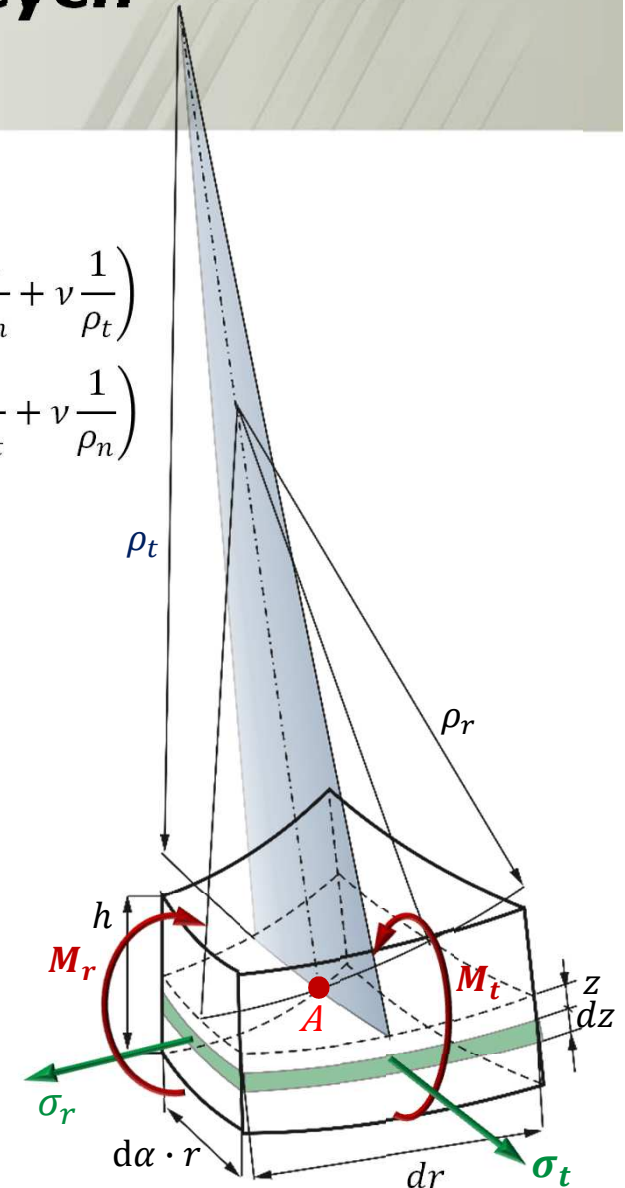
$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_n} + \nu \frac{1}{\rho_t} \right) z dz$$

$$M_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_n} + \nu \frac{1}{\rho_t} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{1}{\rho_n} + \nu \frac{1}{\rho_t} \right)$$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$M_t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t z dz = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right),$$

D – sztywność zginania płyty



Równowaga wyciętego elementu płyty

$$\sum_i F_{iz} = 0 \Rightarrow qrdadr - (T + dT)(r + dr)d\alpha + Trd\alpha = 0$$

$$qrdadr - Tdrd\alpha - dT(r + dr)d\alpha = 0$$

$$qrd\alpha - (T dr + dT r) - dTdrd\alpha = 0$$

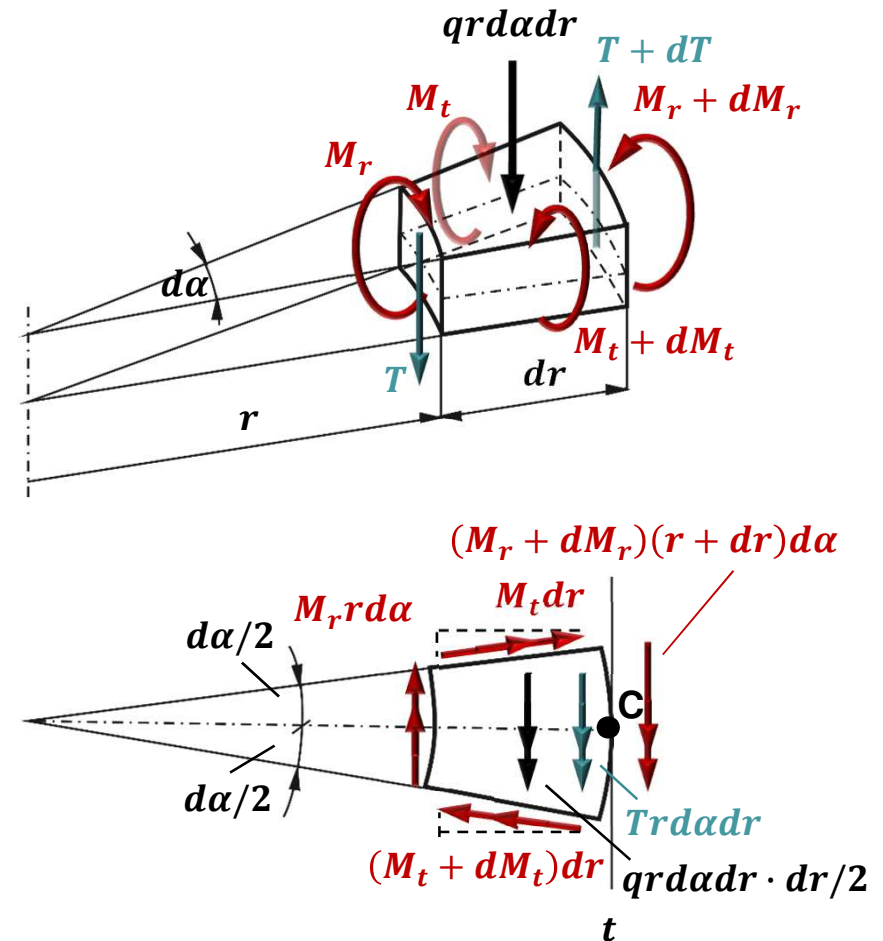
$$(T dr + dT r) = \frac{d(T \cdot r)}{dr} dr \Rightarrow \frac{d(T \cdot r)}{dr} = qr$$

$$\sum_i M_{it} = 0 \Rightarrow (M_r + dM_r)(r + dr)d\alpha - M_r r d\alpha - 2M_t dr \sin \frac{d\alpha}{2} + Trdadr + \frac{qrdadrdr}{2} = 0$$

$$M_r dr d\alpha + dM_r r d\alpha + dM_r dr d\alpha$$

$$-M_t dr d\alpha + Trdadr + \frac{qrdadrdr}{2} = 0$$

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t + Tr = 0$$



Ugięcia i naprężenia

$$M_r + \frac{dM_r}{dr}r - M_t + Tr = 0$$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

$$M_t = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right)$$

$$\Rightarrow -D \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) - D \left(r \frac{d^3w}{dr^3} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) + D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2w}{dr^2} \right) + Tr = 0$$

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{T}{D}$$

Równanie powierzchni ugięcia płyty:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \cdot r \right) \right] = \frac{T}{D}, \quad \frac{d(T \cdot r)}{dr} = qr$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{dw}{dr} \cdot r \right) \right] \right\} = \frac{q}{D},$$

Naprężenia promieniowe i obwodowe:

$$\sigma_r = \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho_n} + \nu \frac{1}{\rho_t} \right) = \frac{-Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} z \quad (\sigma_r)_{max} = \frac{6M_r}{h^2}$$

$$\sigma_t = \frac{12M_t}{h^3} z \quad (\sigma_t)_{max} = \frac{6M_t}{h^2}$$