



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość Materiałów

Stateczność prętów prostych

Równowaga, utrata stateczności, siła krytyczna, wyboczenie w zakresie liniowo – sprężystym i poza liniowo – sprężystym, projektowanie elementów konstrukcyjnych przy wyboczeniu

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Dr hab. inż. Kinga Nalepka

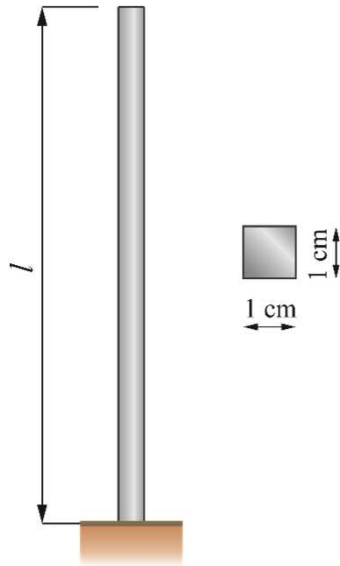
B2, III p., pok. 312

e-mail: knalepka@agh.edu.pl

tel. 12 617 30 98

Utrata wytrzymałości, a utrata stateczności

Jaką długość może mieć stalowy słup o przekroju $A = 1 \text{ cm}^2$ obciążony wyłącznie ciężarem własnym aby nie utracił wytrzymałości ?



Warunek bezpieczeństwa: $\frac{\max|N|}{A} \leq k_c$

U podstawy słupa:

$$\frac{\cancel{\gamma}Al}{A} \leq k_c \rightarrow l \leq \frac{k_c}{\gamma}$$

Ciężar właściwy stali $\gamma = 78.5 \text{ kN/m}^3$

Naprężenie dopuszczalne $k_c = 160 \text{ MPa}$

$$l \leq \frac{160 \cdot 10^3 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}}{78.5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}} \rightarrow l \leq 2038 \text{ m} \quad \text{!}$$

Słup o długości 2 km traci stateczność.

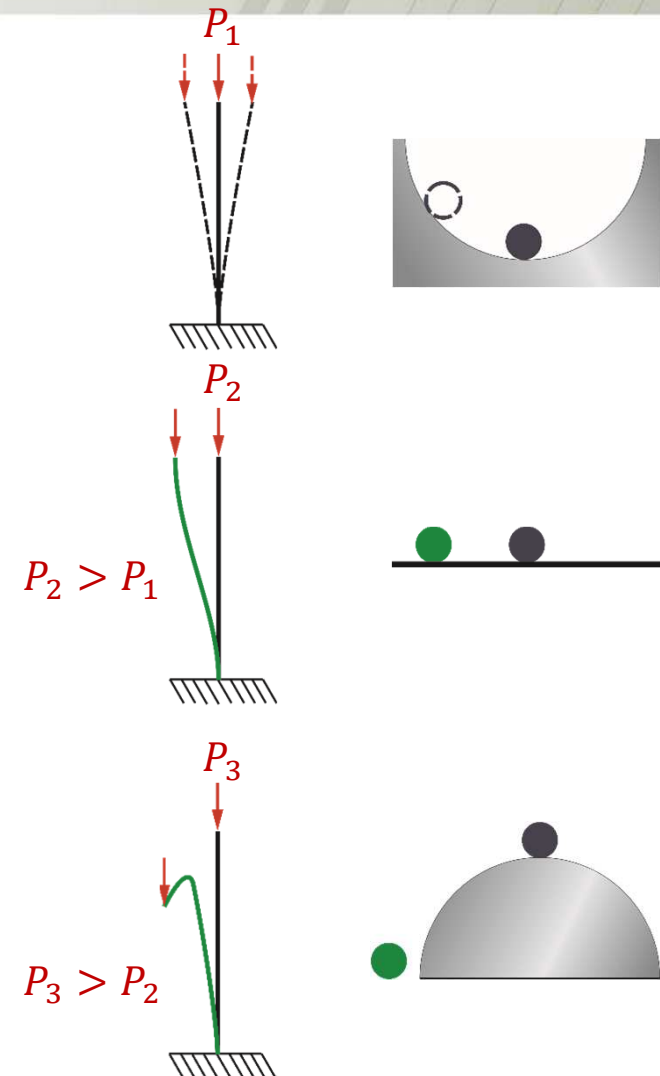
Oprócz warunku bezpieczeństwa powinien być pełniony warunek stateczności.

Równowaga

Jeżeli ciało wytrącone z położenia równowagi, po upływie skończonego czasu, powraca do pierwotnego położenia to znajduje się w **stanie równowagi statecznej**.

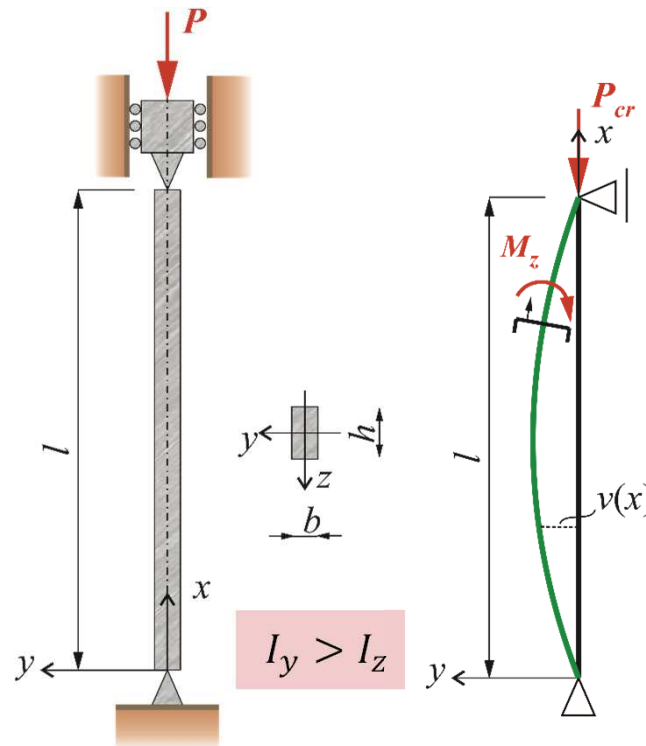
Jeżeli ciało wytrącone z położenia równowagi, po upływie skończonego czasu, przyjmuje inne, nowe położenie to znajduje się w **stanie równowagi obojętnej**.

Jeżeli ciało wytrącone z położenia równowagi nigdy nie powróci już do pierwotnego położenia to znajduje się w **stanie równowagi niestatecznej (chwiejnej)**.



Siła krytyczna

Siła krytyczna - siła ściskająca prosty pręt o ustalonej geometrii, więzach i materiale, przy której traci on równowagę stateczną na rzecz chwiejnej lub obojętnej, czyli przyjmuje inne od pierwotnego, krzywoliniowe położenie równowagi.



Krzywizna funkcji $v(x)$:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|v''(x)|}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|M_z(x)|}{E \cdot I_z}$$

Ujemny moment wywołuje ujemną krzywiznę:

$$\frac{M_z(x)}{E \cdot I_z} = \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}}$$

gdzie: $M_z(x) = -P_{cr}v(x)$

Wyboczenie następuje w płaszczyźnie najmniejszej sztywności giętej.

Wyboczenie pręta podpartego przegubowo

Zgodnie z liniową teorią sprężystości rozważamy małe przemieszczenia punktów belki (względem jej długości) oraz małe pochodne przemieszczeń:

$$(v'(x))^2 \cong 0 \quad \rightarrow \quad v''(x) = \frac{-P_{cr}v(x)}{EI_z}$$

Podstawiając $k^2 = \frac{P_{cr}}{EI_z}$ otrzymujemy: $v''(x) + k^2v(x) = 0$

Równanie różniczkowe liniowe, jednorodne $\rightarrow v(x) = A \sin kx + B \cos kx$

Warunki brzegowe: $v(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, $v(l) = 0 \Rightarrow \sin kl = 0$,

Ostatecznie: $v(x) = A \sin kx$, gdzie: $k = \frac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{C}$

Liczby n ograniczamy do naturalnych, gdyż rozwiązanie dla $n = 0$ oznacza, że pręt nie ulega wyboczeniu – zachowuje swoją pierwotną prostoliniową postać, a rozwiązanie dla $n < 0$ traci sens fizyczny wobec $k = \sqrt{P_{cr}/(EI_z)}$.

Tak więc: $\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{P_{cr}}{EI_z} \Leftrightarrow P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI_z}{l^2}$, gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$

Wyboczenie następuje przy najmniejszej wartości siły krytycznej, dla $n = 1$. Stąd:

siła krytyczna $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}$, **linia ugięcia** $v(x) = A \sin \frac{\pi}{l} x$

Wyboczenie w zakresie liniowo - sprężystym

Przedstawione rozwiązanie podał L. Euler w 1744 roku. Postać siły krytycznej może być zachowana również przy innych sposobach zamocowania jeżeli długość pręta zastąpimy długością efektywną tzw. wyboczeniową - l_e .

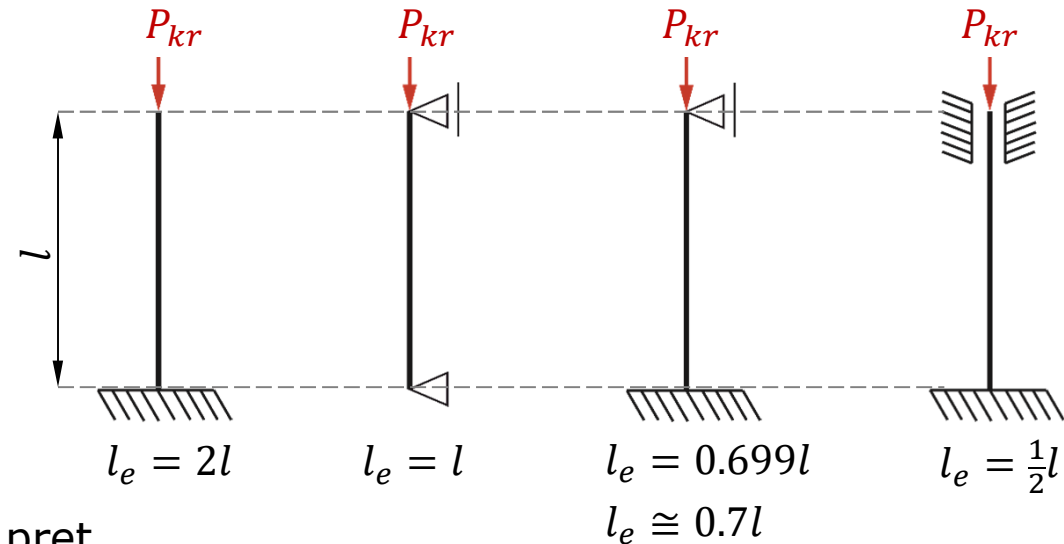
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_z}{l_e^2} \quad (1.1)$$

Rozwiązanie Eulera obowiązuje gdy pręt pracuje w stanie mechanicznym liniowo sprężystym. Wówczas naprężenie:

$$\sigma_e = \frac{P_e}{A} \xrightarrow{(1.1)} \sigma_e = \frac{\pi^2 EI_z}{l_e^2 A}$$

Wprowadzając:

- promień bezwładności $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \xrightarrow{\quad} \sigma_e = \frac{\pi^2 E i_z^2}{l_e^2}$
- smukłość $\lambda = \frac{l_e}{i_z} \xrightarrow{\quad} \sigma_e = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (1.2)$



Zakres zastosowania rozwiązania Eulera P_{cr}, σ_e

$$\sigma_e \leq R_H \xrightarrow{\quad} \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq R_H \xrightarrow{\quad} \lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}}$$

$$\text{czyli: } \lambda \geq \lambda_{gr}, \quad \lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} \quad (1.3)$$

λ_{gr} - smukłość graniczna

Wyboczenie w zakresie sprężysto - plastycznym. Podejście empiryczne

Wzór Tetmajera - Jasińskiego: $\sigma_{T-J} = a - b\lambda + c\lambda^2$

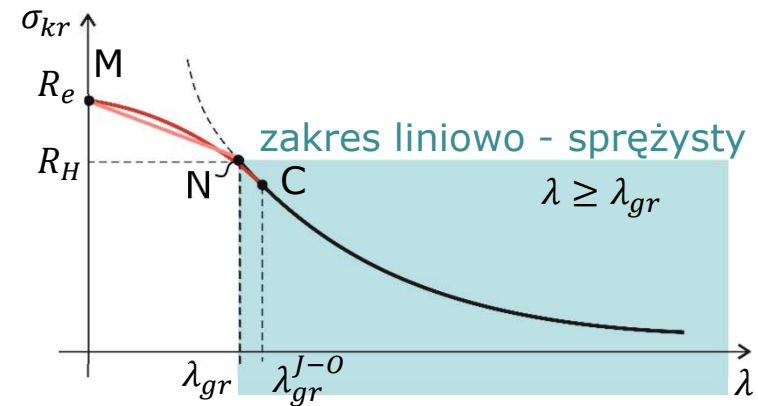
Stałą c stosuje się tylko dla materiałów nieliniowo sprężystych np. żeliwa.

Prosta przechodząca przez punkty M i N:

$$M(0, R_e) \Rightarrow a = R_e$$

$$N(\lambda_{gr}, R_H) \Rightarrow b = \frac{R_e - R_H}{\lambda_{gr}} \Rightarrow b = \frac{R_e - R_H}{\pi} \sqrt{\frac{R_H}{E}}$$

$$\sigma_{T-J} = R_e - \frac{R_e - R_H}{\pi} \sqrt{\frac{R_H}{E}} \cdot \lambda \quad (1.4)$$



Wzór Johnsona - Ostenfelda: $\sigma_{J-0} = A - B\lambda^2$

Warunki jakie spełnia parabola:

1. przechodzi przez punkt M
2. zachowuje ciągłość w punkcie C
3. styczna w punkcie C również jest ciągłą

$$1. \rightarrow M(0, R_e) \Rightarrow A = R_e \quad (1.5)$$

$$3. \rightarrow \left. \frac{d\sigma_{J-0}}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_c} = \left. \frac{d\sigma_E}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_c} \Leftrightarrow -2B\lambda_c = \frac{-2\pi^2 E}{\lambda_c^3} \Leftrightarrow B = \frac{\pi^2 E}{\lambda_c^4}$$

$$2. \rightarrow \sigma_{J-0} \Big|_{\lambda=\lambda_c} = \sigma_E \Big|_{\lambda=\lambda_c} \Rightarrow A - B\lambda_c^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_c^2}$$

$$1 \text{ i } 3 \rightarrow R_e - \frac{\pi^2 E}{\lambda_c^4} \lambda_c^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_c^2} \Leftrightarrow \lambda_c = \lambda_{gr}^{J-0} = \pi \sqrt{\frac{2E}{R_e}}$$

$$B = \frac{R_e^2}{4\pi^2 E} \quad (1.6)$$

$$\sigma_{J-0} = R_e \left(1 - \frac{R_e}{4\pi^2 E} \lambda^2 \right) \quad (1.7)$$

Projektowanie prętów przy wyboczeniu

Zależność naprężenie krytyczne – smukłość według przybliżeń empirycznych

Materiał	E [GPa]	Wzór Tetmajera - Jasińskiego			Wzór Johnsona - Osterfelda		
		$\lambda_{gr}(1.3)$	a	b	$\lambda_{gr}^{J-O}(1.6)$	A (1.5)	B (1.7)
Stal niskowęglowa	210	105	310	1.14	116	310	0.0116
Stal (0.28 – 0.37 % C)	210	100	464	3.62	94	464	0.0260
Stal niklowa (do 5% Ni)	211	86	470	2.30	94	470	0.0266
Drewno miękkie (świerk)	12	100	29.3	0.194	90	29.3	0.002

Warunek stateczności $P \leq P_{dop.w}$

P – siła podłużna w pręcie

$P_{dop.w}$ – siła dopuszczalna przy wyboczeniu

$$P_{dop.w} = \frac{P_{kr}}{x_w} \quad x_w - \text{współczynnik bezpieczeństwa przy wyboczeniu}$$

gdy $\lambda \geq \lambda_{gr}$, zakres liniowo-sprężysty, wzór Eulera $P_{kr} = P_E$ (1.1)

gdy $\lambda < \lambda_{gr}$, zakres poza liniowo-sprężysty $P_{kr} = \sigma_{T-J} \cdot A$ (1.4) lub $P_{kr} = \sigma_{J-O} \cdot A$ (1.7)

Materiał	x_w
Stal	1.5 - 4
Drewno	2.5 - 3.5
Żeliwo	4.5 - 5.5