AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość materiałów

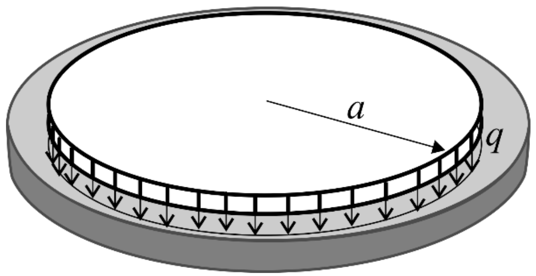
IMiR - IA - Wykład Nr 11

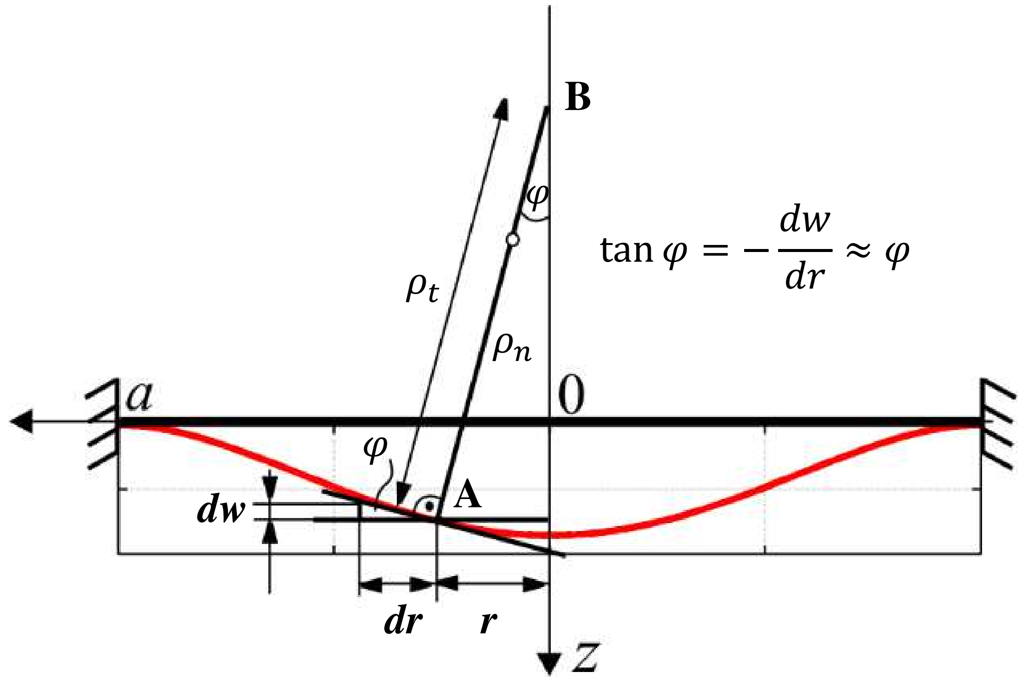
Płyty kołowe obciążone symetrycznie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Płyta – płaski element konstrukcyjny o jednym wymiarze znacząco mniejszym od dwóch pozostałych, obciążony prostopadle do płaszczyzny środkowej.

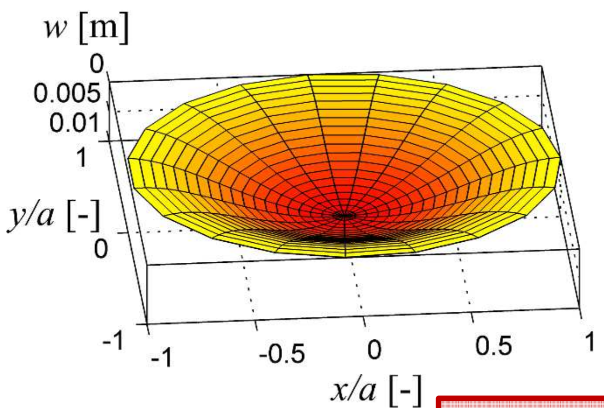
Płyta kołowa równomiernie obciążona, utwierdzona na krawędziach zewnętrznych





$$\tan\varphi = -\frac{dw}{dr} \approx \varphi$$

Ugięcie płyty



Promienie krzywizn: $\boxed{\frac{1}{\rho_n} = -\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{d\varphi}{dr},}$ $\boxed{\frac{1}{\rho_t}} = \frac{\sin\varphi}{r} \approx \boxed{\frac{\varphi}{r} \approx \frac{-1}{r}\frac{dw}{dr}}$

11.2. Płyty kołowe obciążone symetrycznie: natężenie momentów gnących

Odkształcenia w kierunku promieniowym i obwodowym:

$$\boldsymbol{\varepsilon_r = \frac{z}{\rho_n}, \ \varepsilon_t = \frac{z}{\rho_t}}$$

Naprężenia w kierunku promieniowym i obwodowym:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_n} + \nu\frac{1}{\rho_t}\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_t} + \nu\frac{1}{\rho_n}\right)$$

Moment zginający w przekroju obwodowym M_r i promieniowym M_t na jednostkę długości:

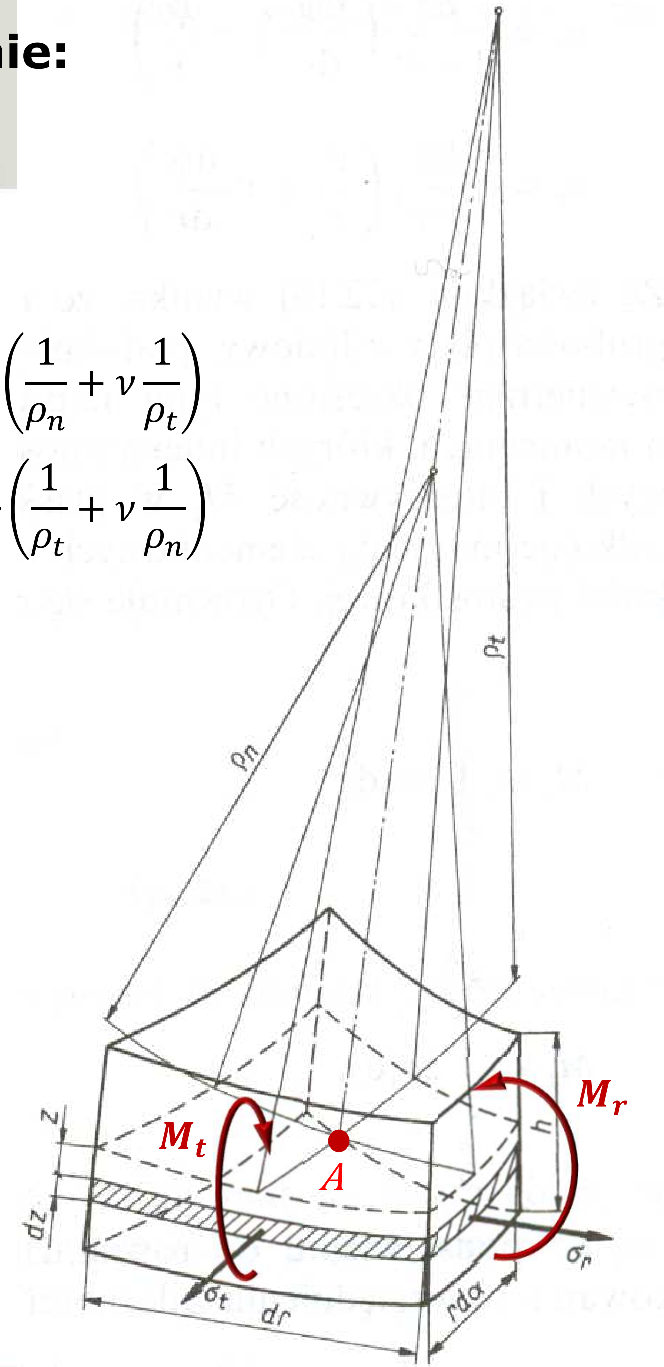
$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_n} + \nu\frac{1}{\rho_t}\right) z dz$$

$$M_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_n} + \nu\frac{1}{\rho_t}\right)\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{\rho_n} + \nu\frac{1}{\rho_t}\right)$$

$$\boldsymbol{M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}}$$

$$\boldsymbol{M_t = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t z dz = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right),}$$

D – sztywność zginania płyty



11.3. Płyty kołowe obciążone symetrycznie: równowaga

Równowaga wyciętego elementu płyty

$$\boxed{\sum_i \boldsymbol{F_{iz}} = \mathbf{0}} \Longrightarrow qrd\alpha dr - (T + dT)(r + dr)d\alpha + Trd\alpha = 0$$

$$qrd\alpha dr - Tdrd\alpha - dT(r + dr)d\alpha = 0$$

$$qrdr - (T\,dr + dT\,r) - \cancel{dTdr}d\alpha = 0$$

$$(T\,dr + dT\,r) = \frac{d(T\cdot r)}{dr}dr \qquad \Longrightarrow \boxed{\frac{\boldsymbol{d(T\cdot r)}}{\boldsymbol{dr}} = \boldsymbol{qr}}$$

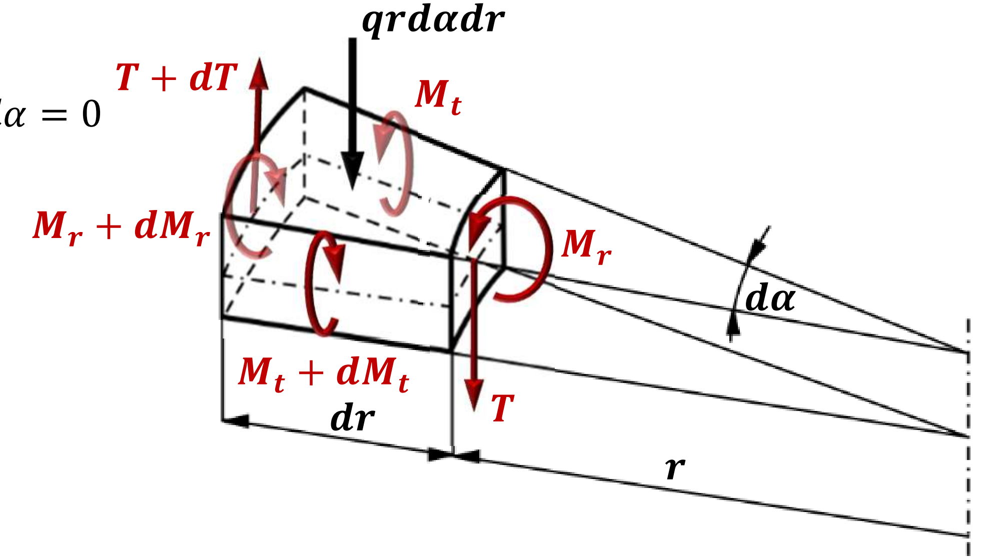
$$\boxed{\sum_i \boldsymbol{M_{it}} = \mathbf{0}} \Longrightarrow (M_r + dM_r)(r + dr)d\alpha - M_r rd\alpha$$

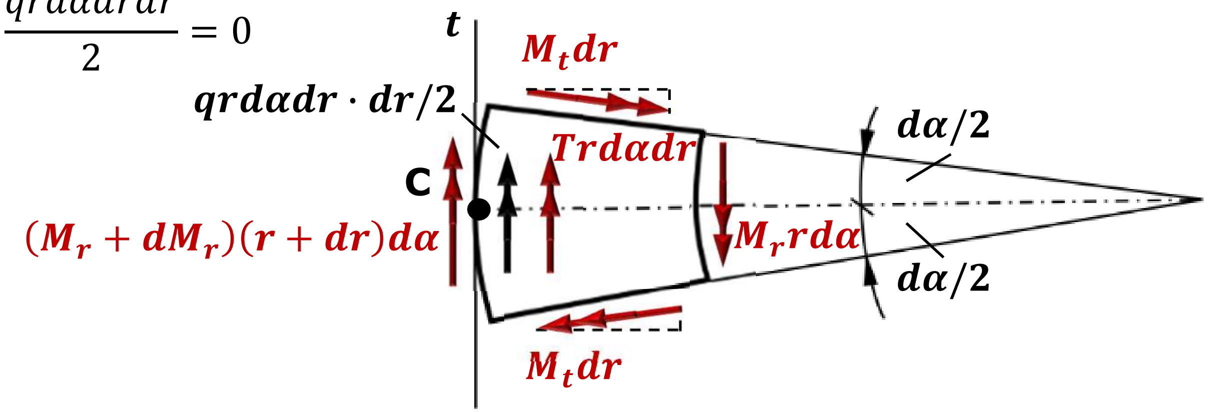
$$-2M_t dr \sin\frac{d\alpha}{2} + Trd\alpha dr + \frac{qrd\alpha drdr}{2} = 0$$

$$M_r drd\alpha + dM_r rd\alpha + \cancel{dM_r drd\alpha}$$

$$-M_t drd\alpha + Trd\alpha dr + \cancel{\frac{qrd\alpha drdr}{2}} = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{M_r} + \frac{\boldsymbol{dM_r}}{\boldsymbol{dr}}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{M_t} + \boldsymbol{Tr} = \mathbf{0}}$$





11.4. Płyty kołowe obciążone symetrycznie: ugięcie, naprężenia

$$\boldsymbol{M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t + Tr = 0}$$

$$M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$M_t = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$-D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) - D\left(r\frac{d^3w}{dr^3} + \nu\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) + D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right) + Tr = 0$$

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} = \frac{T}{D}$$

Równanie powierzchni ugięcia płyty:

$$\boldsymbol{\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr}\cdot r\right)\right] = \frac{T}{D}, \quad \frac{d(T\cdot r)}{dr} = qr}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{dw}{dr}\cdot r\right)\right]\right\} = \frac{q}{D},}$$

Naprężenia promieniowe i obwodowe:

$$\sigma_r = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{\rho_n} + \nu\frac{1}{\rho_t}\right) = \frac{-Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$\boldsymbol{\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3}z \qquad (\sigma_r)_{max} = \frac{6M_r}{h^2}}$$

$$\boldsymbol{\sigma_t = \frac{12M_t}{h^3}z \qquad (\sigma_t)_{max} = \frac{6M_t}{h^2}}$$