AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość Materiałów

Zginanie ukośne
Rozciąganie/ ściskanie mimośrodowe

Rozkłady naprężeń, warunki bezpieczeństwa, przykłady obliczeń

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

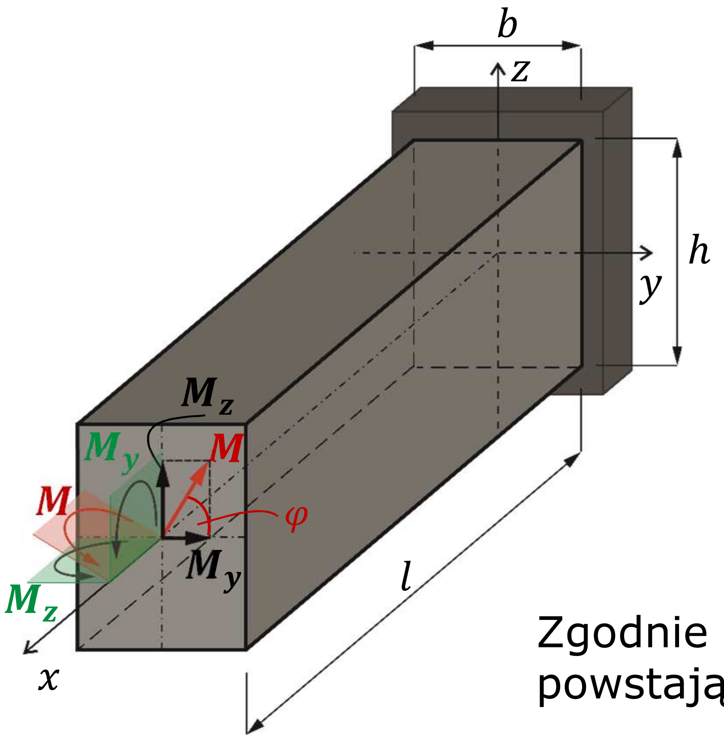
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

dr hab. inż. Kinga Nalepka

B2, III p., pok. 312

e-mail: knalepka@agh.edu.pl **tel. 12 617 30 98**

Zginanie ukośne



Prosty pręt pryzmatyczny o dowolnym, litym przekroju poprzecznym utwierdzony na jednym końcu obciążono na swobodnej ściance poprzecznej momentem leżącym w płaszczyźnie przechodzącej przez oś pręta, ale nie zawierającej żadnej z osi głównych centralnych przekroju poprzecznego

- Pomijamy siły masowe.
- Oś x wzdłuż osi pręta, a y i z stanowią osie główne centralne przekroju poprzecznego .

Zgodnie z zasadą superpozycji w przekroju poprzecznym powstają naprężenia normalne o rozkładzie:

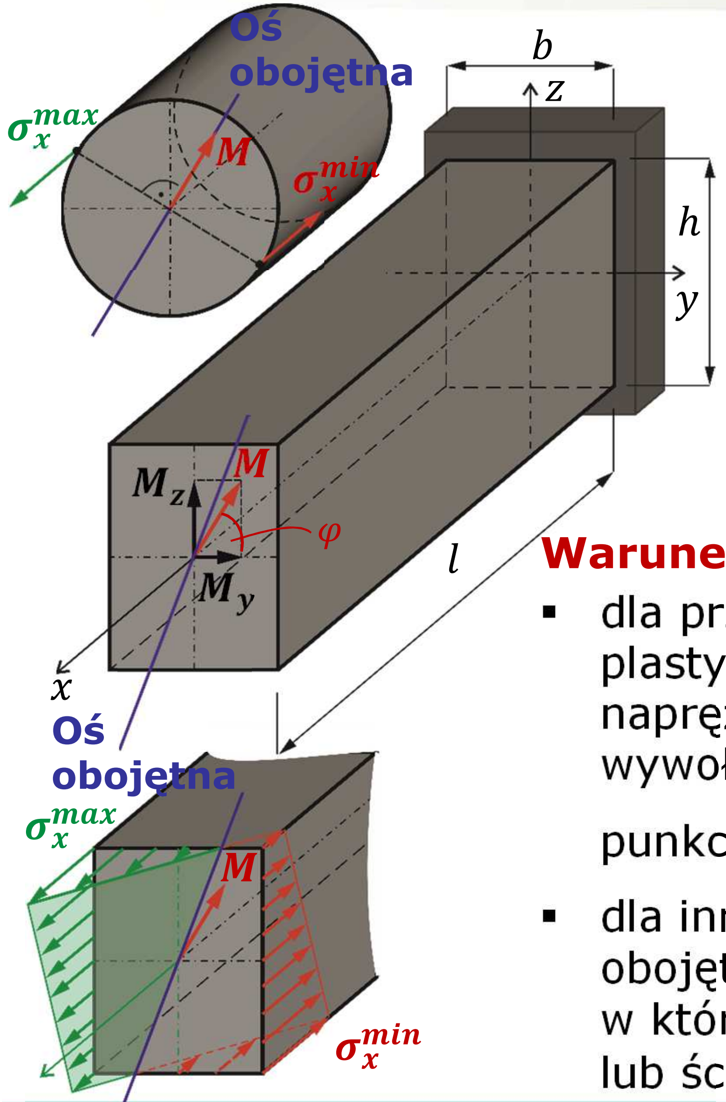
$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

$$M_y = M \cos\varphi$$

$$M_z = M \sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_x = M\left(\frac{\cos\varphi}{I_y} z - \frac{\sin\varphi}{I_z} y\right)$$

Zginanie ukośne
Rozkład naprężeń



Oś obojętna:

$$\sigma_x = 0 \Leftrightarrow 0 = M\left(\frac{\cos\varphi}{I_y}z - \frac{\sin\varphi}{I_z}y\right) \Rightarrow \boxed{z = \left(\frac{I_y}{I_z}\tan\varphi\right)y}$$

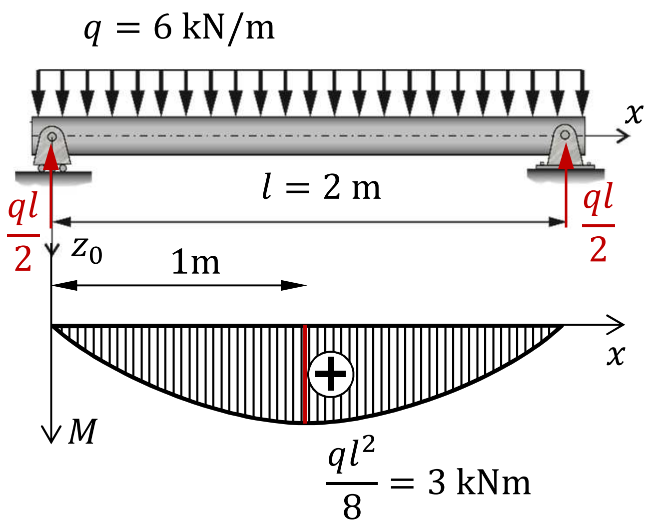
- przechodzi przez środek ciężkości przekroju
- dla przekrojów o równych momentach głównych centralnych $I_y = I_z$ pokrywa się z wektorem momentu $\bar{M}$
- dla przekrojów o różnych momentach głównych centralnych $I_y \neq I_z$ odchyla się od kierunku momentu w stronę osi mniejszej bezwładności

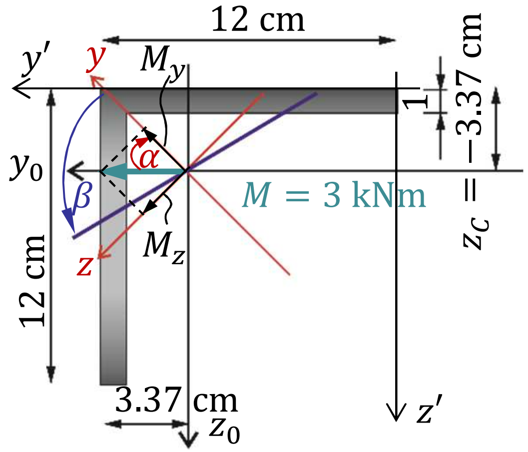
Warunek bezpieczeństwa:

- dla przekrojów wykonanych z materiałów sprężysto plastycznych, gdzie maksymalne bezwzględne wartości naprężeń (wyłącznie rozciągających lub ściskających) wywołane momentem M_y oraz M_z występują w jednym punkcie: $\boxed{\max|\sigma_x| = \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \leq k_g}$
- dla innych przekrojów należy wyznaczyć położenie osi obojętnej, a następnie punkty najbardziej od niej oddalone, w których występują największe naprężenia rozciągające lub ściskające. Wówczas: $\boxed{\sigma_x^{max} \leq k_r \text{ i } \left|\sigma_x^{min}\right| \leq k_c}$

Zginanie ukośne
Przykład

Belka swobodnie podparta o długości $l = 2\ \mathrm{m}$ o przekroju równoramiennego kątownika 120 x 120 x 10 została obciążona jak na rysunku. Wyznacz bryłę naprężeń w przekroju niebezpiecznym (obciążonym największym momentem zginającym).





Centralne momenty bezwładności

$$I_{y0} = I_{z0} = 318.5254\ \mathrm{cm}^4$$

$$I_{y0z0} = 189.3913\ \mathrm{cm}^4$$

Główne centralne momenty bezwładności

$$I_y = 507.9167\mathrm{cm}^4$$

$$I_z = 129.1341\mathrm{cm}^4$$

Obrót pierwszej osi głównej centralnej

$$\alpha = -45\,°$$

Składowe momentu w osiach głównych centralnych: $M_y = M_z = \frac{3}{2}\sqrt{2}\ \mathrm{kNm}$

Rozkład naprężeń w przekroju niebezpiecznym: $\sigma_x = \dfrac{1.5\sqrt{2}\ \mathrm{kNm}}{507.9167 \cdot 10^{-8}\mathrm{m}^2} z - \dfrac{1.5\sqrt{2}\ \mathrm{kNm}}{129.1341 \cdot 10^{-8}\mathrm{m}^2} y$

Oś obojętna: $\sigma_x = 0 \;\Rightarrow z = 3.933 \cdot y \;\Rightarrow \beta = 75.7°$

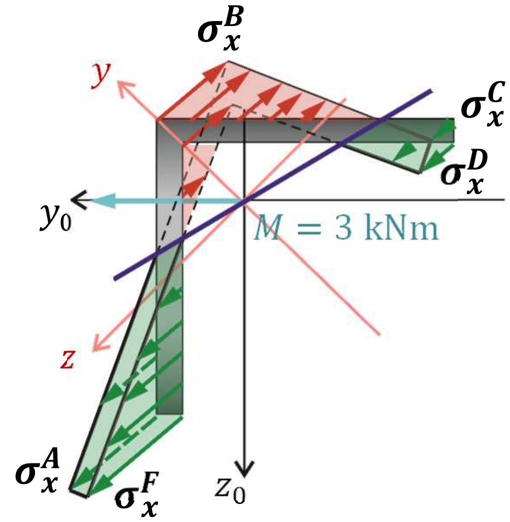
Zginanie ukośne
Przykład

Macierz przejścia

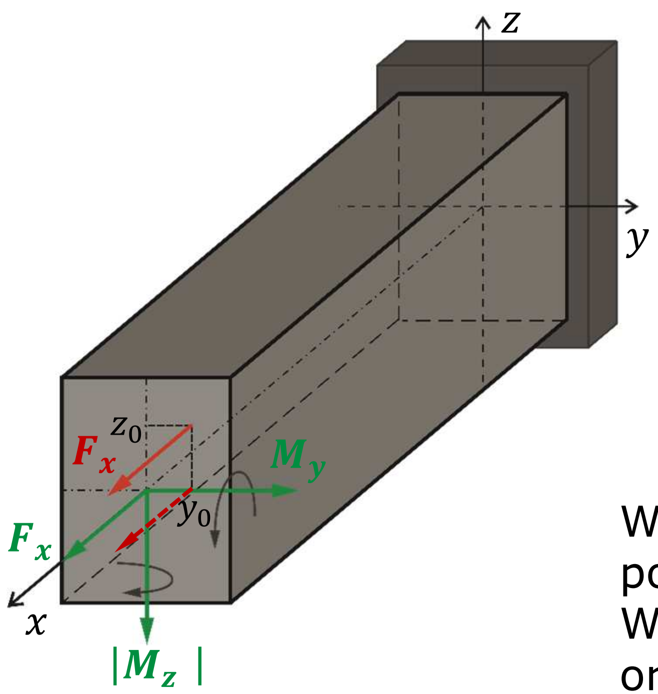
- **Pierwszy** wiersz stanowią współrzędne wersora **pierwszej** osi nowego układu w układzie starym.
- **Drugi** wiersz stanowią współrzędne wersora **drugiej** osi nowego układu w układzie starym.

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Układ centralny [cm]	Układ główny centralny [cm]	Naprężenie [MPa]
$A'(3.37, 8.63)$	$A(-3.72, 8.49)$	96,548
$\mathrm{B}'(3.37, -3.37)$	$\mathrm{B}(4.77, 0.0)$	-78,281
$\mathrm{C}'(-8.63, -3.37)$	$\mathrm{C}(-3.72, -8.49)$	25,671
$\mathrm{D}'(-8.63, -3.37)$	$\mathrm{D}(-4.43, -7.78)$	40,240
$\mathrm{E}'(2.37, -2.37)$	$\mathrm{E}(3.35, 0.0)$	-55,049
$\mathrm{F}'(2.37, 8.63)$	$\mathrm{F}(-4.43, 7.78)$	105,211



Rozciąganie mimośrodowe



$M_y = F_x \cdot z_0$

$M_z = -F_x \cdot y_0$

Prosty pręt pryzmatyczny o dowolnym, litym przekroju poprzecznym utwierdzony na jednym końcu obciążono na swobodnej ściance poprzecznej siłą skierowaną zgodnie z normalną zewnętrzną, ale przyłożoną w pewnej odległości od środka ciężkości

- Pomijamy siły masowe.
- Oś x wzdłuż osi pręta, a y i z stanowią osie główne centralne przekroju poprzecznego .

Wykorzystując zasadę de Saint-Venanta redukujemy początkowe obciążenie do środka ciężkości przekroju. W rezultacie otrzymujemy proste rozciąganie ($\boldsymbol{F_x}$) oraz proste zginania momentami o kierunkach osi głównych centralnych $\boldsymbol{M_y}$, $\boldsymbol{M_z}$.

Zgodnie z zasadą superpozycji:

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \quad \Rightarrow \sigma_x = \frac{F_x}{A} + \frac{F_x z_0}{I_y} z + \frac{F_x y_0}{I_z} y$$

Rozciąganie mimośrodowe
Rozkład naprężeń

$$\sigma_x = \frac{F_x}{A}\left(1 + \frac{z_0}{\frac{I_y}{A}} z + \frac{y_0}{\frac{I_z}{A}} y\right) \Rightarrow \boxed{\sigma_x = \frac{F_x}{A}\left(1 + \frac{z_0}{i_y^2} z + \frac{y_0}{i_z^2} y\right)}$$

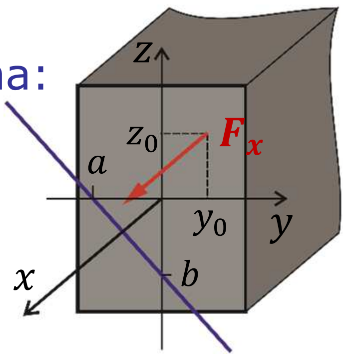
Promienie bezwładności: $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$, $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$

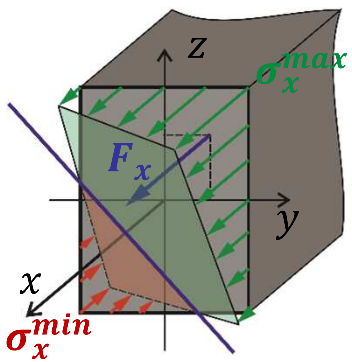
Oś obojętna:

$$\sigma_x = 0 \quad \Rightarrow \frac{y}{\left(-\frac{i_z^2}{y_0}\right)} + \frac{z}{\left(-\frac{i_y^2}{z_0}\right)} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1}$$

Odcinkowa postać prostej, gdzie $a = -\frac{i_z^2}{y_0}$, $b = -\frac{i_y^2}{z_0}$

oś obojętna:





Warunek bezpieczeństwa:

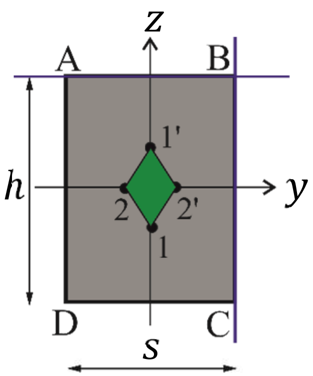
- dla przekrojów wykonanych z materiałów sprężysto plastycznych, gdzie maksymalne bezwzględne wartości naprężeń (wyłącznie rozciągających lub ściskających) wywołane siłą F_x oraz momentami M_y i M_z występują w jednym punkcie:
  $$\max|\sigma_x| = \frac{|F_x|}{A} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{|M_z|}{W_z} \le k_g$$
- dla innych przekrojów należy wyznaczyć położenie osi obojętnej, a następnie punkty najbardziej od niej oddalone, w których występują największe naprężenia rozciągające lub ściskające. Wówczas: $\sigma_x^{max} \le k_r$ i $\left|\sigma_x^{min}\right| \le k_c$

Rozciąganie mimośrodowe
Rdzeń przekroju

Rdzeniem przekroju nazywamy obszar przekroju, w punktach, którego przyłożona siła normalna daje naprężenia jednego znaku w całym przekroju, ściskanie albo rozciąganie

Współrzędne punktu konturu rdzenia:

$$y_0 = \frac{-i_z^2}{a(y^P, z^P)}, \quad z_0 = \frac{-i_y^2}{b(y^P, z^P)}$$



$$i_y^2 = \frac{h^2}{12}$$

$$i_z^2 = \frac{s^2}{12}$$

$$\text{prosta AB:}\, z = \frac{h}{2} \Rightarrow a = \infty, b = \frac{h}{2} \Rightarrow y_0 = 0, z_0 = -\frac{h}{6}$$

$$\text{prosta CD:}\, y = \frac{s}{2} \Rightarrow a = \frac{s}{2}, b = \infty \Rightarrow y_0 = -\frac{s}{6}, z_0 = 0$$