Akademia Górniczo – Hutnicza Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki	
	Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Nazwisko i Imię:		
Nazwisko i Imię:		
Wydział Górnictwa i Geoinżynierii		Grupa nr:
Ocena:	Podpis:	Data:

Ć w i c z e n i e K 4

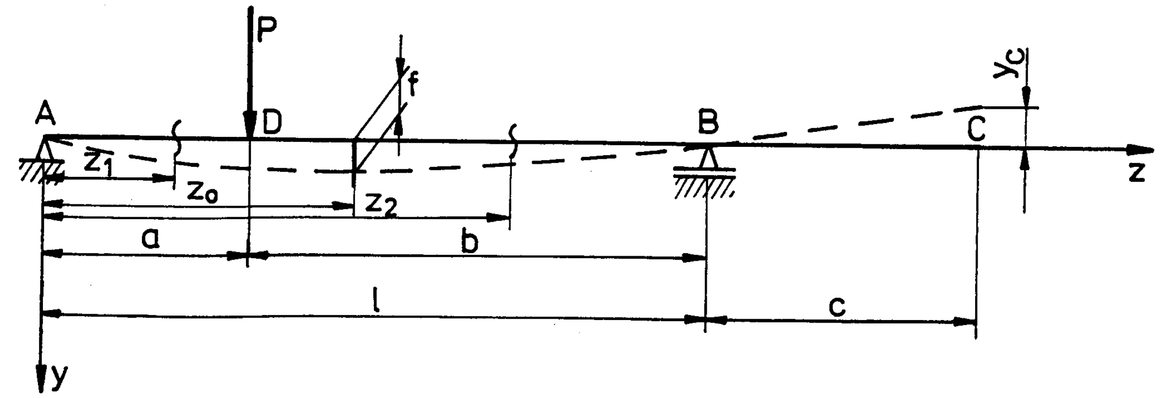
Pomiar ugięć belki zginanej o przekroju dwuteowym.

1. Wprowadzenie teoretyczne.

Ugięcia belek są wynikiem działania obciążeń zewnętrznych. Ugięcie definiuje się jako odległość między odkształconą a nieodkształconą osią belki mierzoną prostopadle do nieodkształconej osi belki. Wartość maksymalnego ugięcia nazywamy strzałką ugięcia, którą to wielkość wykorzystuje się do wymiarowania belek z warunku sztywności. Informacją o rzeczywistym zachowaniu się konstrukcji jest znajomość ugięć belki w różnych jej punktach, którą można uzyskać przez ich pomiar.

Do pomiaru ugięć elementów konstrukcji belkowych czy kratowych stosuje się różne techniki i przyrządy pomiarowe. W pomiarach ugięć stosuje się najczęściej czujniki przemieszczeń. Mogą to być czujniki zegarowe, indukcyjne, czujniki w których do pomiaru przemieszczeń wykorzystano tensometry rezystancyjne oraz metody bezkontaktowe do których zaliczmy metodę interferencji siatek rastorowych (metoda mory) i metodę holograficzną w której wykorzystano interferometrię plankową..

Do wyznaczania ugięć badanej belki wykorzystamy metodę analityczną, metodę obciążeń wtórnych, a do pomiaru na stanowisku pomiarowym wykorzystane będą indukcyjne czujniki przemieszczeń. Schemat belki pomiarowej pokazuje rysunek 1. Belka będzie obciążona siłą skupioną *P* przyłożoną w dowolnej odległości od podpory *A*. Do wyznaczenia ugięć w dowolnym punkcie i wyznaczenie maksymalnego ugięcia między podporami posłużymy się metodą analityczną a ugięcie swobodnego końca obliczymy metodą obciążeń wtórnych.



Rys. 1. Schemat analizowanej belki.

W metodzie analitycznej ugięcie wyznaczamy przez dwukrotnie całkowanie przybliżonego równania linii ugięcia, które ma postać:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M_{(z)}}{EJ_x} \tag{1}$$

Po rozwiązaniu równania (1) ze względu na *y* i wyznaczenie stałych całkowania z warunków brzegowych i ciągłości otrzymujemy wzory na ugięcie w dowolnym przekroju belki:

- w przedziale *AD*

$$y_{(z)} = \frac{P}{EJ_x}\left[\frac{b}{6l}(z^3 + b^2 z - l^2 z)\right] \tag{2}$$

- w przedziale *DB*

$$y_{(z)} = \frac{P}{EJ_x}\left[\frac{b}{6l}(z^3 + b^2 z - l^2 z) - \frac{(z-a)^3}{6}\right] \tag{3}$$

W tym przedziale wystąpi ekstremum ugięcia a zachodzi to w punkcie, w którym kąt obrotu y_2' jest równy zero.

Zatem gdy $y_2' = 0 \rightarrow z_0 = l - \sqrt{\frac{1}{3}\left(l^2 - a^2\right)}$.

Obliczając ugięcie w odległości z_0 otrzymamy maksymalne ugięcie które wyniesie:

$$f = y_{(zo)} = \frac{Pa\left(l^2 - a^2\right)}{9\sqrt{3}EJ_x}\sqrt{1 - \frac{a^2}{l^2}} \tag{4}$$

Ugięcie swobodnego końca y_c wyznaczamy metodą obciążeń wtórnych jak to pokazuje rysunek 2. Wartość ugięcia i kąta obrotu wyznaczamy:

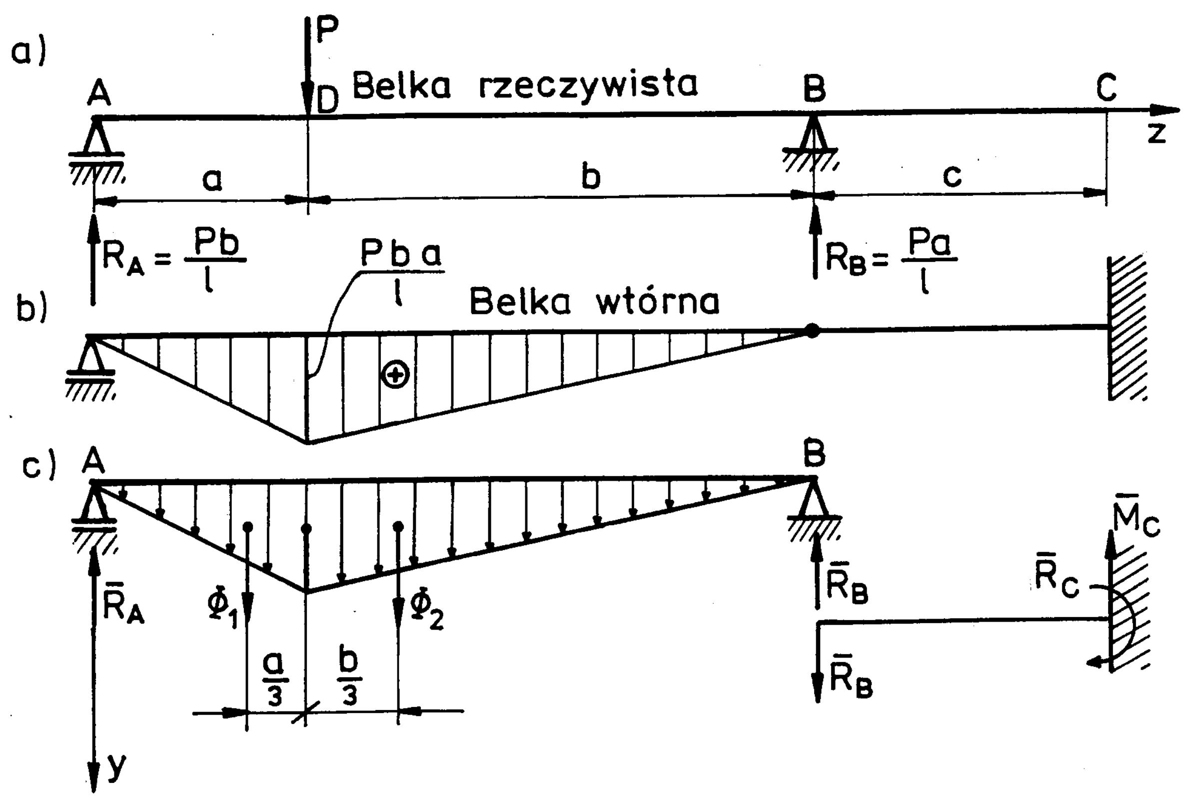
$$y = \frac{\overline{M}}{EJ}$$

(5)

$$\alpha = \frac{\overline{T}}{EJ}$$

gdzie: $\overline{M}, \overline{T}$ - moment wtórny i siła poprzeczna wtórna w punkcie w którym liczymy ugięcie i kąt obrotu,

$E\,J$ - sztywność zginania.



Rys. 2. Schemat obliczania ugięć metodą obciążeń wtórnych: a-schemat belki rzeczywistej,
b- belka wtórna obciążona wykresem momentów gnących belki rzeczywistej,
c - schemat wyznaczania sił i momentów wtórnych.

Aby wyznaczyć ugięcie w punkcie C należy na podstawie rysunku 2 wyznaczyć wartość momentu wtórnego $\overline{M_c}$ korzystając z równań statyki. Obliczmy kolejno:

- wtórne siły skupione

$$\Phi_1 = \frac{Pba}{l} a \frac{1}{2} = \frac{Pba^2}{2 \cdot l}$$

$$\Phi_2 = \frac{Pba}{l} b \frac{1}{2} = \frac{Pab^2}{2 \cdot l}$$

- reakcję wtórną w punkcie $B - \overline{R_B}$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \overline{R_B} \cdot l - \Phi_1 \frac{2}{3} a - \Phi_2 \left(a + \frac{b}{3} \right) = 0$$

$$\overline{R}_B = \frac{Pab(l+a)}{6l} = \frac{Pab(l+a)}{6l} = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6l}$$

- moment wtórny w punkcie $C - \overline{Mc}$

$$\sum Mc = 0 \Rightarrow \overline{R}_B \cdot c - \overline{M}_c - 0$$

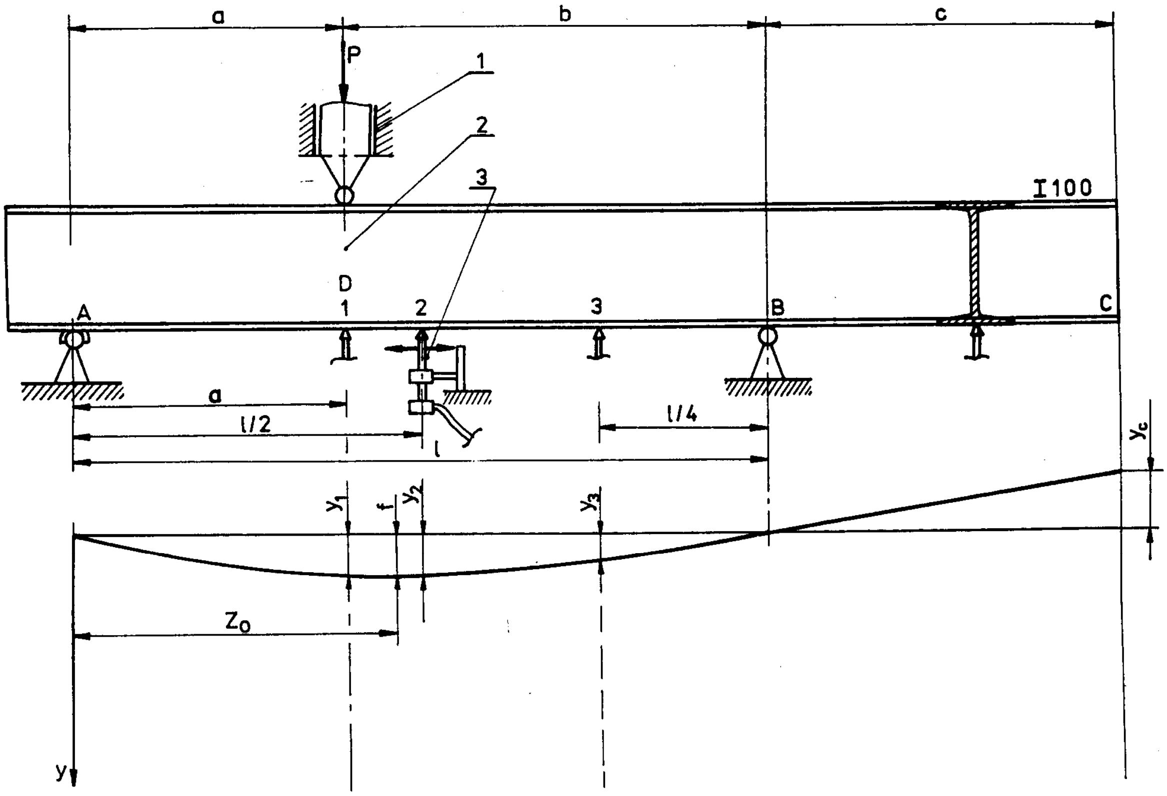
$$\overline{M}c = \frac{Pabc(l+a)}{6lEJ} = \frac{Pac(l^2a^2)}{6lEJ}$$

Ostatecznie ugięcie w punkcie *C* wynosi:

$$yc = \frac{\overline{Mc}}{EJ_x} = \frac{Pac}{6lEJ_x}\left(l^2 - a^2\right) \tag{6}$$

2. Doświadczalne wyznaczenie ugięcia na stanowisku pomiarowym.

Do badań doświadczalnych użyto belki wykonanej z dwuteownika 140, która została poddana zginaniu na maszynie wytrzymałościowej. Schemat stanowiska pomiarowego pokazuje rysunek 3. Do pomiaru ugięć zastosowano czujniki indukcyjne i zegarowe.



Rys. 3. Schemat belki pomiarowej: 1- maszyna wytrzymałościowa, 2 - belka dwuteowa, 3 - czujnik indukcyjny.

3. Przebieg ćwiczenia:

I. Wyznaczenie ugięć metodami teoretycznymi.

1. Wyznaczyć ugięcie w środku pręta AB ze wzoru (3) dla $z = l/2$.
2. Wyznaczyć ugięcie w punkcie pod siłą P dla $z = a$.
3. Obliczyć strzałkę ugięcia ze wzoru (4) dla $z = z_0$.
4. Ugięcie wolnego końca wyznaczyć metodą obciążeń wtórnych korzystając ze wzoru (6).

II. Wyznaczenie ugięć przez pomiar czujnikami indukcyjnymi.

1. Pomierzyć odległość a, b i c.
2. Określić wymiary przekroju poprzecznego (obliczyć lub odczytać z tablic).
3. Obciążyć belkę siłą skupioną P nie powodując odkształceń plastycznych $P \leq P$ dop. (pomiar powtarzamy dwukrotnie dla różnych wartości P).
4. Pomierzyć ugięcia w punktach *1, 3* i *C,* wyszukać ekstremum ugięcia w przedziale między siłą P a środkiem przęsła zagęszczając pomiary.
5. Określić eksperymentalnie odległość Z_0 i zmierzyć ją.
6. Zestawić wyniki pomiarowe w tabeli (1).
7. Dokonać porównania wyników teoretycznych i doświadczalnych wyznaczając:

$$\Delta_1 = \frac{f_d - f_t}{f_t} \cdot 100\%$$

$$\Delta_2 = \frac{Z_{od} - Z_{ot}}{Z_{0t}} \cdot 100\%$$

Tabela 1. Zestawienie wyników obliczeń i pomiarów ugięć.

Nr pomiaru	Obciążenie *P[kN]*	Ugięcie teoretyczne [mm]				Ugięcie doświadczalne [mm]				Miejsce extr. ugięcia	
		y_1	Y_3	y_c	f	y_1	y_3	y_c	f	z_{0t}	z_{0d}
1.											
2.											
3.											
4.											
5.											
6.											