Akademia Górniczo – Hutnicza Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki		Nazwisko i Imię:		
		Nazwisko i Imię:		
	Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji	**Wydział Górnictwa i Geoinżynierii**		Grupa nr:
		Ocena:	Podpis:	Data:

Ć w i c z e n i e K 2 a

Wyznaczanie siły krytycznej pręta o przekroju prostokątnym posiadającego krzywiznę początkową.

1. Podstawy teoretyczne.

Elementy prętowe są nieodzownymi częściami konstrukcji stalowych, którymi mogą być kraty płaskie i przestrzenne, słupy, belki itp. W zależności od przekroju pręta i sposobu jego zamocowania wyboczenie może występować w obu płaszczyznach głównych a możemy mieć do czynienia także z wyboczeniem skrętnym. Rozwiązując odpowiednie równania różniczkowe prętów o dowolnych warunkach podparcia ściskanych siłą osiową P, można wyznaczyć najmniejsze wartości obciążeń P_x, P_y, P_φ, które nazwane są siłami krytycznymi [ ] a można je wyznaczyć ze wzorów:

$$P_{xkr} = \frac{\pi^2 E J_x}{(\mu_x l)^2} \tag{1}$$

$$P_{ykr} = \frac{\pi^2 E J_y}{(\mu_y l)^2} \tag{2}$$

$$P_{\varphi kr} = \frac{1}{i_0^2}\left[\frac{\pi^2 E J_\omega}{(\mu_{\varphi l})^2} + G I_t\right] \tag{3}$$

gdzie: l – długość pręta,

μ_x, μ_y,μ_φ - współczynniki długości wyboczeniowej zależne od warunków podparcia,

I_x, I_y, I_ω, I_t - momenty bezwładności względem osi oraz wycinkowy i czystego skręcania.

E, G – moduły sprężystości podłużnej i poprzecznej.

Wartość naprężenia krytycznego określa się ze wzoru:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_\varsigma^2} \tag{4}$$

W powyższym wzorze $\varsigma = x, y, \varphi$.

λ_ς - smukłość pręta w zależności od analizowanego wyboczenia, którą określa się:

$$\lambda_x = \frac{\mu_x l}{ix} \tag{5}$$

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{iy} \tag{6}$$

$$\lambda_\varphi = \sqrt{\frac{I_x + I_y}{\frac{I_\omega}{(\mu_\varphi l)^2} + \frac{GI_t}{\pi^2 E}}} \tag{7}$$

gdzie: ix, iy – promienie bezwładności.

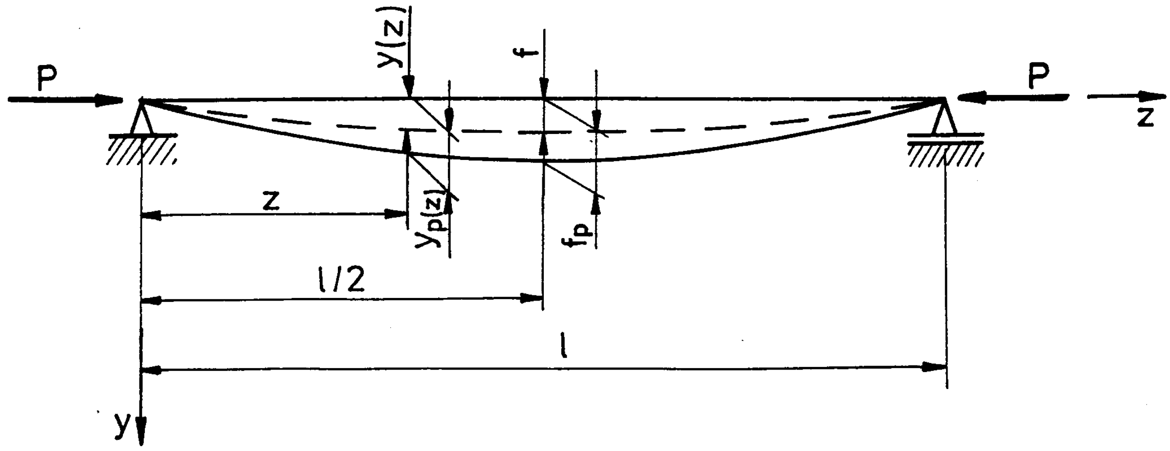
Współczynniki długości wyboczeniowej w zależności od rodzaju podparcia przyjmuje się:

- przegubowe podparcie obu końców $\mu = 1$
- utwierdzenie obu końców $\mu = 0,5$
- jeden koniec utwierdzony, drugi wolny $\mu = 2,0$

jeden koniec utwierdzony, drugi przegubowy $\mu = 0,7$.

2. Doświadczalne wyznaczanie siły krytycznej metodami przybliżonymi.

Celem ćwiczenia jest określenie siły krytycznej w kierunku mniejszej sztywności zginania EJ_{min} podpartego przegubowo na obu końcach. Siłę krytyczną będziemy wyznaczać teoretycznie i doświadczalnie. Ponieważ wyznaczenie siły krytycznej dla prętów rzeczywistych jest trudne do zrealizowania (niemożliwość wykonania idealnego pręta) dlatego posługujemy się metodami pośrednimi. Analizowany pręt posiada krzywiznę początkową co pokazuje rysunek 1.



Rys. 1. Schemat pręta z krzywizną początkową.

Przy wyznaczaniu siły krytycznej dla pręta posiadającego krzywiznę początkową można posłużyć się sposobem przybliżonym. Zakładamy , że początkowa linia ugięcia ma kształt sinusoidalny:

$$y_{(z)} \cong f \sin\frac{\pi z}{l}, \tag{8}$$

która nie zmienia się także po przyłożeniu siły osiowej *P:*

$$y_p \cong f_p \sin\frac{\pi z}{l} \tag{9}$$

Będziemy rozpatrywać ugięcia w środku pręta gdzie:

$$\begin{aligned} y_{p\left(z=\frac{l}{2}\right)} &= f_p \\ y_{\left(z=\frac{l}{2}\right)} &= f \end{aligned} \tag{10}$$

Różniczkowe równanie linii ugięcia dla stanu początkowego:

$$\frac{d^2 y_{(z)}}{dz^2} = \frac{M_{(z)}}{EJ_{\min}} \tag{11}$$

gdzie: $M_{(z)}$- zastępczy moment, który powoduje ugięcie początkowe *f*.

Gdy przyłożymy siłę osiową *P* równanie różniczkowe linii ugięcia możemy zapisać:

$$\frac{d^2 y_{p(z)}}{dz^2} = \frac{M_{(z)} - P y_{p(z)}}{EJ_{\min}} \tag{12}$$

Po wyznaczeniu z równania (11) momentu zastępczego $M_{(z)}$ podstawieniu do (12) uwzględnieniu zależności (8) i (9) otrzymamy:

$$\left(f_p - f\right)\frac{d^2}{dz^2}\left(\sin\frac{\pi z}{l}\right) = -\frac{P}{EJ_{\min}} f_p\,, \tag{13}$$

a po zróżniczkowaniu:

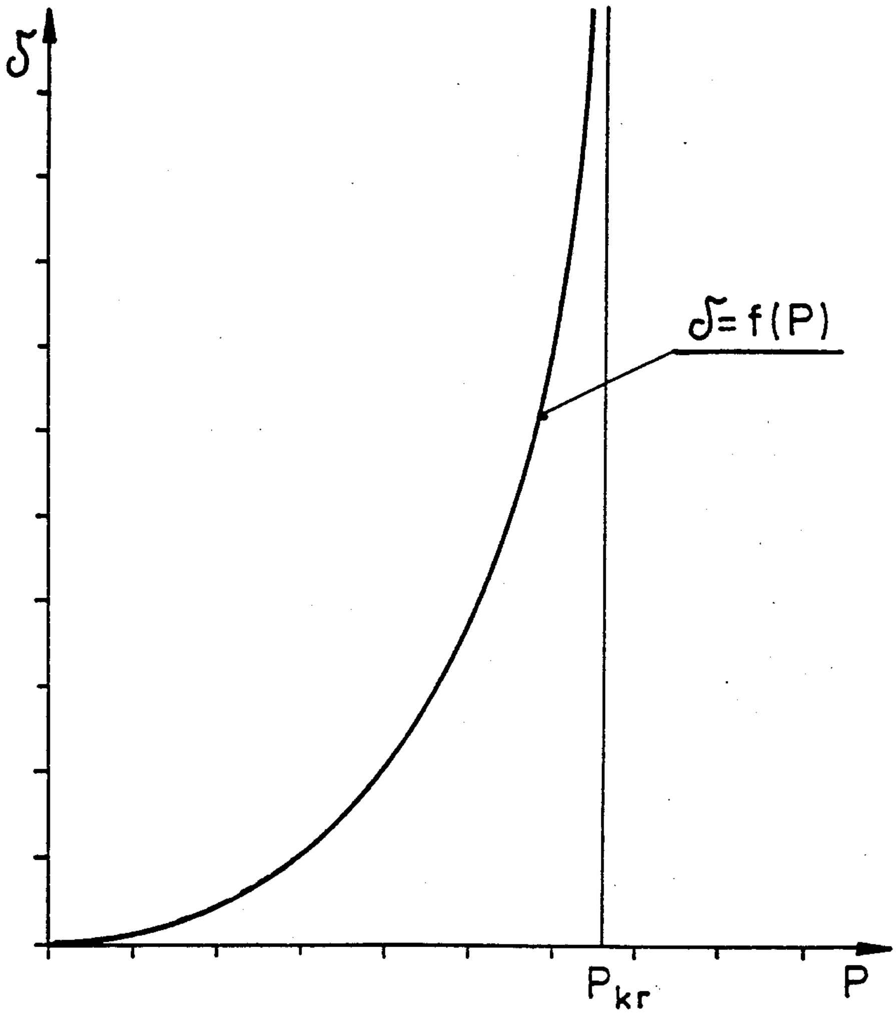
$$\frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2}\left(f_p - f\right) = P f_p \tag{14}$$

Po podstawieniu $\frac{\pi^2 EJ_{\min}}{l^2} = P_{kr}$ oraz $f_p = f + \delta$

$$\delta = \frac{f}{\frac{P_{kr}}{P} - 1} \tag{15}$$

gdzie: f – ugięcie początkowe w środku pręta,
δ - ugięcie od siły osiowej *P*,
P_{kr} – Eulerowska siła krytyczna dla wyboczenia sprężystego.

Zależność (15) $\delta = f(P)$) jest zależnością hiperboliczną przedstawioną na rysunku 2.



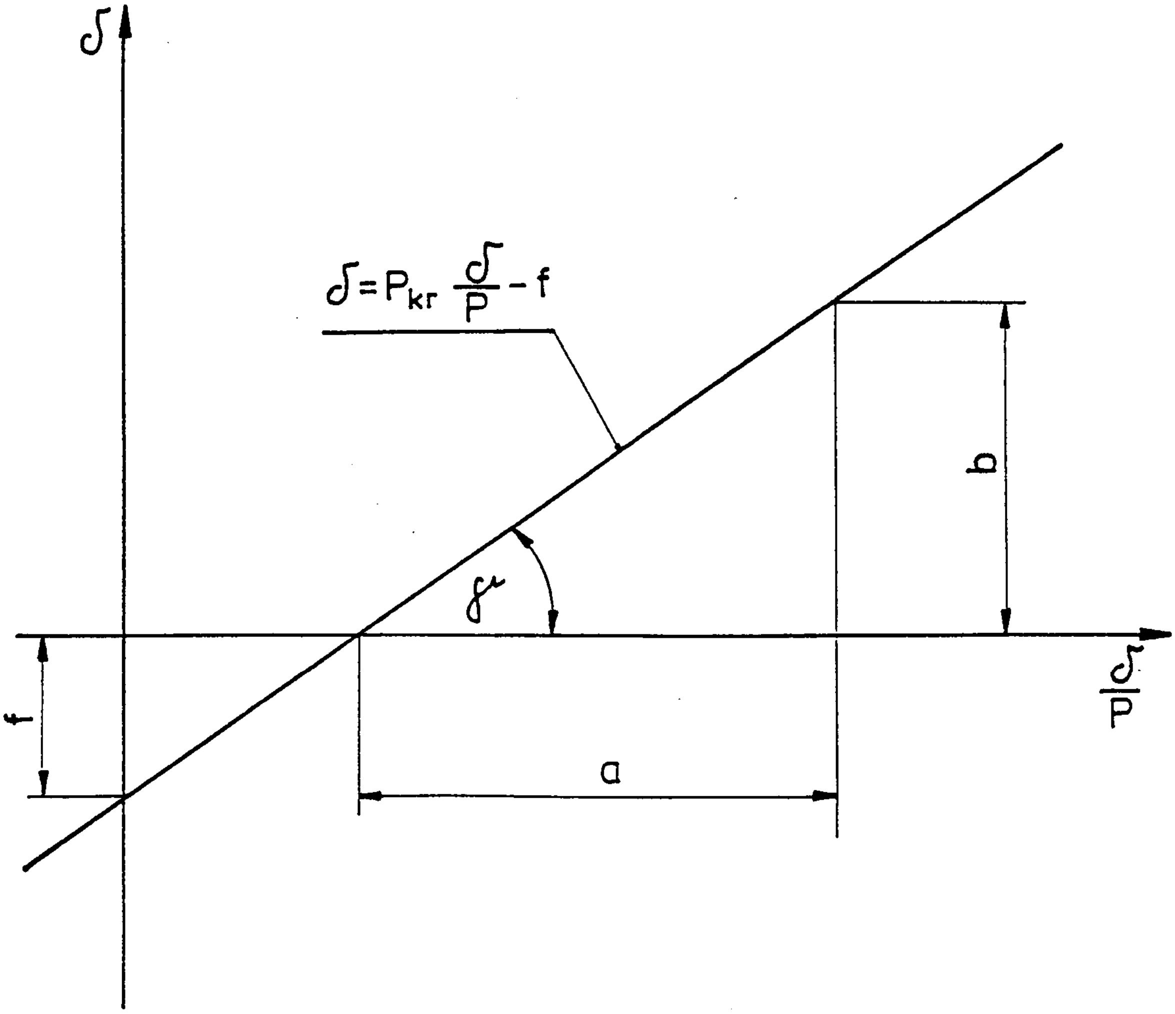
Rys. 2. Wykres zależności δ =*f(P)* dla pręta zamocowanego jak na rys. 1.

Sporządzając taki wykres możemy odczytać wartość siły krytycznej wyboczenia giętego jako pionową asymptatę krzywej $\delta = f(P)$.

Zależność (15) można przedstawić po przekształceniu w postaci:

$$\delta = P_{kr}\frac{\delta}{P} - f \tag{16}$$

Wyznaczenie siły krytycznej z powyższego wzoru nazywane jest metodą SOUTHWELLA. W powyższym wzorze zależność $\delta = f_1\left(\frac{\delta}{P}\right)$ jest zależnością liniową o pewnym współczynniku kierunkowym jak to pokazuje rysunek 3.

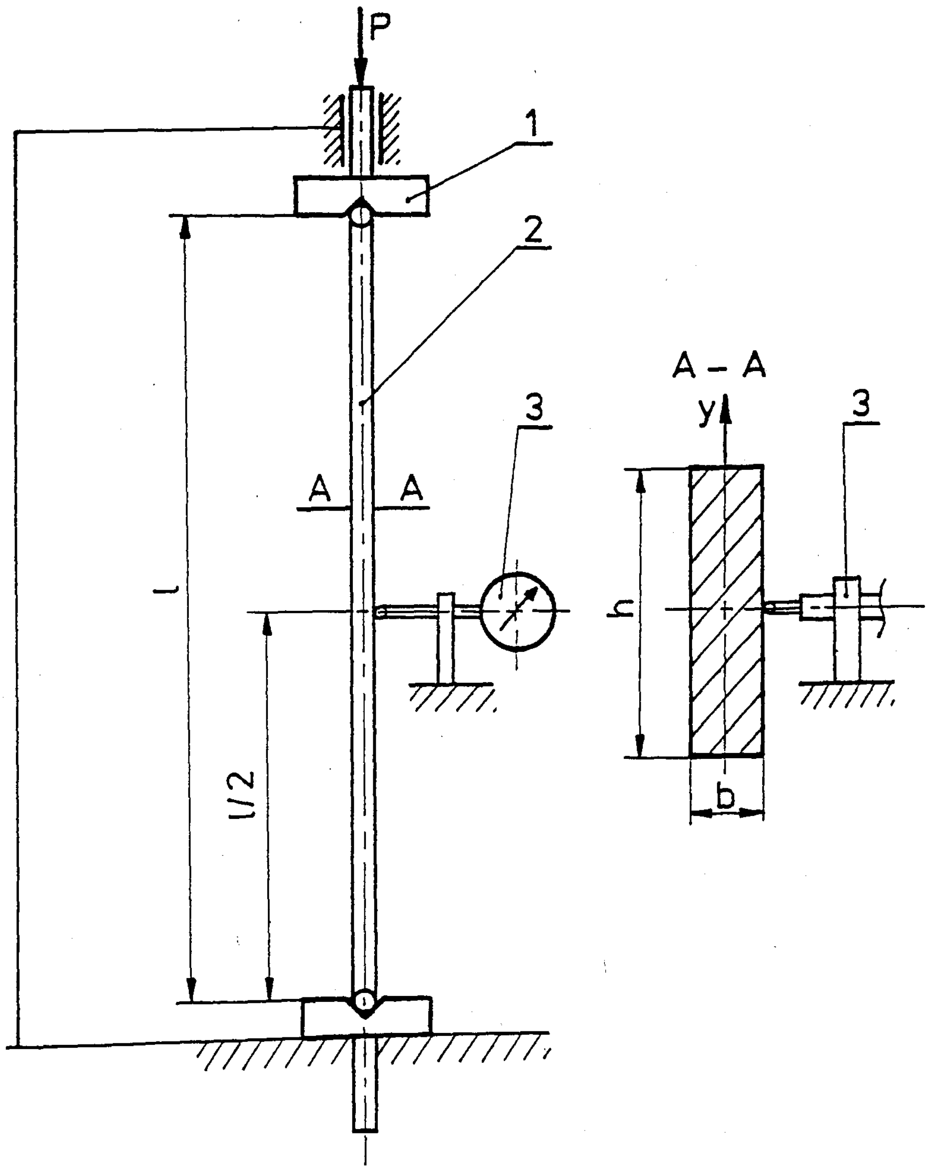


Rys. 3. Wykres zależności $\delta = f_1\left(\dfrac{\delta}{P}\right)$ dla pręta zamocowanego jak na rysunku 1.

Aby wyznaczyć siłę krytyczną wyboczenia giętego P_{kr} należy sporządzić wykres $\delta = f_1\left(\dfrac{\delta}{P}\right)$ a współczynnik kierunkowy jest jej wartością:

$$P = tg\gamma = \frac{b}{a} \tag{17}$$

Schemat stanowiska pomiarowego z zamocowanym prętem o przekroju prostokątnym do wyznaczania eksperymentalnej siły krytycznej pokazuje rys. 4.



Rys. 4. Schemat stanowiska pomiarowego: 1- maszyna wytrzymałościowa, 2 – pręt ściskany, 3 – czujnik zegarowy.

3. Przebieg ćwiczenia:

1. Wykonać pomiar wymiarów przekroju i długości.

2. Obliczyć moment bezwładności I_{min}, oraz promień bezwładności i_{min}.
3. Obliczyć smukłość rzeczywistą λ.
4. Gdy $\lambda > \lambda_{gr}$ wyznaczyć siłę krytyczną P_{kr} ze wzoru Eulera (1).
5. Ustawić w środku pręta i środku szerokości czujnik zegarowy i ustawić tarczę ruchomą na *„0”*.
6. Obciążyć pręt siłą osiową P do wartości $P<0,7\,P_{kr}$.
7. wyniki pomiaru ugięcia δ i siły P notujemy w tabeli (1).
8. Wykonujemy wykres $\delta = f(P)$ i wyznaczmy siłę krytyczną P_{kr1}.
9. Wykonujemy wykres $\delta = f_1\left(\frac{\delta}{P}\right)$ i wyznaczamy siłę krytyczną P_{kr2} ze wzoru (5).
10. Przeprowadzamy analizę wyników wyznaczając różnicę wartości siły krytycznej wyznaczonej teoretycznie i doświadczalnie:

$$\Delta = \frac{P_{kr} - P_{krt}}{P_{kr}} \cdot 100\%$$

Tabela 1. Zestawienie wskazań czujnika δ i obliczonych sił krytycznych

Lp.	Obciążenie *P[kN]*	Wskazanie czujnika δ [mm]	Stosunek $\frac{\delta}{P}[mm/kN]$	Siła krytyczna		
				P_{krt}	P_{kr1}	P_{kr2}
0						
1						
2						
3						