
 AGH	Akademia Górniczo – Hutnicza Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
	 Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

Nazwisko i Imię:		
Nazwisko i Imię:		
Wydział Górnictwa i Geoinżynierii		Grupa nr:
Ocena:	Podpis:	Data:

Ć w i c z e n i e K 1

Wyznaczenie rzeczywistych sił wewnętrznych występujących w przekrojach prętów konstrukcji kratowej.

1. Wprowadzenie.

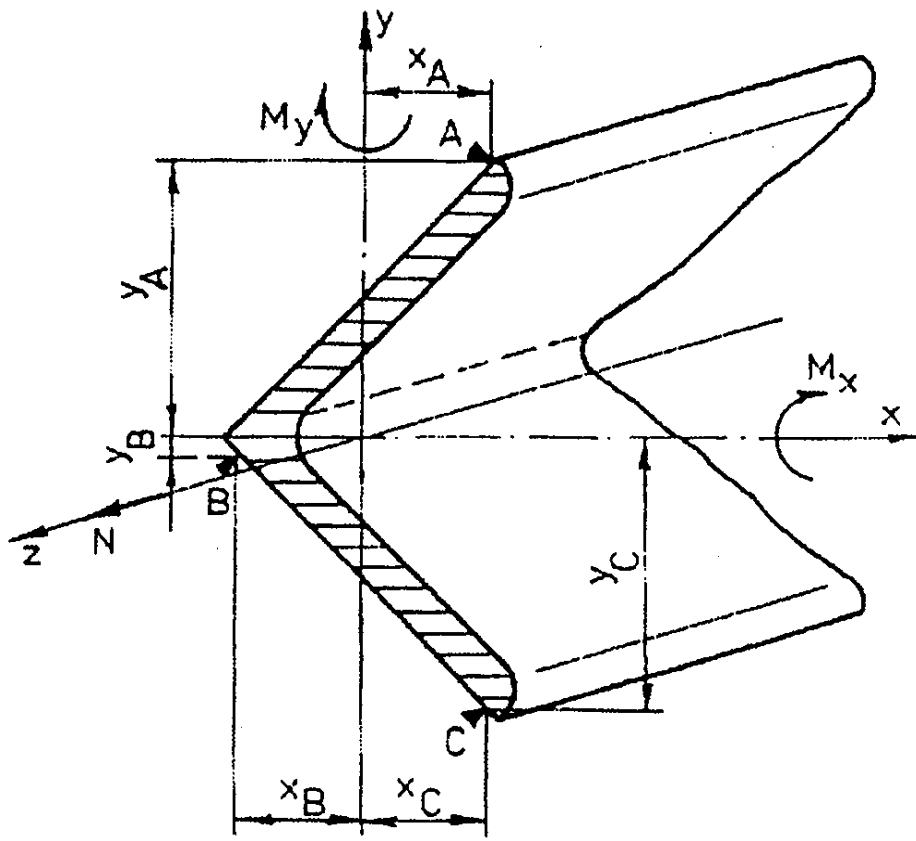
Pręty kratownic wskutek działania w nich sił osiowych doznają odkształceń, a węzły przemieszczeń. Odkształcenia prętów przyjmowane są jako bardzo małe w stosunku do wymiarów geometrycznych kratownicy, stąd przyjęto jako zasadne prawo zeszywnienia określające, że obciążenia działają na kratownicę już odkształconą w ten sposób jak i przed odkształceniem. Materiał z którego wykonane są pręty kratownicy podlega prawu Hooke'a, zaś odkształcenia są liniowymi funkcjami obciążeń. Struktura prętowa spełniająca powyższe założenia stanowi idealny ustrój kratowy.

Założenia idealizujące strukturę prętową bardzo ułatwiają wprawdzie obliczenia statyczne lecz jednocześnie odbiegają od rzeczywistego charakteru pracy ustroju. Najbardziej odbiega od rzeczywistości założenie idealnych beztarciowych przegubów, które nigdy nie jest spełnione. Pręty bowiem połączone w węzłach za pomocą nitów, spoin lub śrub nie zapewniają beztarciowego systemu połączenia, lecz nadają mu charakter połączenia sztywnego lub sprężystego. Innymi słowy rzeczywisty charakter pracy kratownicy zbliżony jest do ustroju ramowego, w którym istotny wpływ na przemieszczenie węzłów mają wewnętrzne siły osiowe. W rzeczywistości pod wpływem obciążenia zewnętrznego kratownica doznaje odkształcenia w wyniku którego węzły ulegają przemieszczeniom obrotowym.

W prętach struktury kratownicy powstają zatem oprócz sił osiowych momenty gnące i siły poprzeczne, które wywołują naprężenia normalne i styczne. Naprężenia te w stosunku do naprężeń podstawowych (pierwszorzędnych) określanych dla idealnego ustroju kratowego (normalnych od wewnętrznych sił osiowych) noszą nazwę naprężeń drugorzędnych. Im większa sztywność węzła tym większy jego odpór sprężysty, a tym samym większy współczynnik sprężystego bądź w pełni sztywnego zamocowania prętu w węzle.

Przyjmując, że o wyężeniu prętów konstrukcji kratowych decyduje wartość sił osiowych i momentów gnących, które w przekrojach prętów wywołują niejednorodny osiowy stan naprężenia (mimośrodowe ściskane lub rozciągane) to dla opisu tak ukształtowanej płaszczyzny stanu naprężenia, która jest nachylona do płaszczyzny przekroju, wystarczy znać położenia trzech punktów na tej płaszczyźnie (wartości naprężeń) które jednoznacznie ją opisują.

Poniżej podano znane wzory określające dla omawianego przypadku wartości naprężeń w funkcji siły osiowej i składowych momentów gnących przedstawionych na rysunku 1.



Rys. 1. Siły wewnętrzne w przekroju kątowym pręta kratownicy.

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{xg}} y_A + \frac{M_y}{I_{yg}} x_A \\ \sigma_B &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{xg}} y_B + \frac{M_y}{I_{yg}} x_B \\ \sigma_C &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_{xg}} y_C + \frac{M_y}{I_{yg}} x_C\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie:

N, M_x, M_y – odpowiednie wartości siły osiowej momentu gnącego M_x (w płaszczyźnie głównej), M_y (w płaszczyźnie głównej yz),

$\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ – wartości naprężeń w badanych punktach A, B, C ,

I_{xg}, I_{yg} – główne centralne momenty bezwładności,

A – pole przekroju pręta,

E – moduł Younga,

$x_{A,B,C}, y_{A,B,C}$ – współrzędne punktów naklejenia tensometrów naprężno oporowych w odniesieniu do głównych centralnych osi bezwładności, przekroju pręta.

Rozwiązując układ równań (1) względem sił wewnętrznych N, M_x, M_y otrzymano:

$$\begin{aligned}N &= A \cdot \frac{\sigma_A (X_C Y_B - X_B X_C) + \sigma_B (X_A Y_C - X_C Y_A) + \sigma_C (X_B Y_A - X_A Y_B)}{X_A (Y_C - Y_B) + X_B (Y_A - Y_C) + X_C (Y_B - Y_A)} \\ M_x &= J_{xg} \cdot \frac{\sigma_A (X_B - X_C) + \sigma_B (X_C - X_A) + \sigma_C (X_A - X_B)}{X_A (Y_C - Y_B) + X_B (Y_A - Y_C) + X_C (Y_B - Y_A)} \\ M_y &= J_{yg} \cdot \frac{\sigma_A (Y_C - Y_B) + \sigma_B (Y_A - Y_C) + \sigma_C (Y_B - Y_A)}{X_A (Y_C - Y_B) + X_B (Y_A - Y_C) + X_C (Y_B - Y_A)}\end{aligned}\quad (2)$$

Dane dla L 25 x 25 x 3

$X_A = 0,594 \text{ cm}$	$Y_A = 1,626 \text{ cm}$	$J_{xg} = 1,3 \text{ cm}^4$	$k_{rz} = 2,15$
$X_B = -0,981 \text{ cm}$	$Y_B = -0,141 \text{ cm}$	$J_{yg} = 0,33 \text{ cm}^4$	$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
$X_C = 0,594 \text{ cm}$	$Y_C = 1,626 \text{ cm}$	$A = 1,45 \text{ cm}^2$	
$X_D = -0,981 \text{ cm}$	$Y_D = 0,141 \text{ cm}$	$k_0 = 2,0$	

Dane dla L 30 x 30 x 4

$X_A = 0,72 \text{ cm}$	$Y_a = 1,974 \text{ cm}$	$I_{xg} = 2,9 \text{ cm}^4$
$X_B = 1,114 \text{ cm}$	$Y_B = -0,141 \text{ cm}$	$I_{yg} = 0,75 \text{ cm}^4$
$X_e = 0,72$	$Y_e = -1,974 \text{ cm}$	$A = 2,27 \text{ cm}^2$
$X_D = -1,114 \text{ cm}$	$Y_D = 0,141 \text{ cm}$	

gdzie:

$\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$

$X_A, X_B, X_C, -Y_A, Y_B, Y_C$

J_{Xg}, J_{Yg}

A

- naprężenia w badanych punktach,

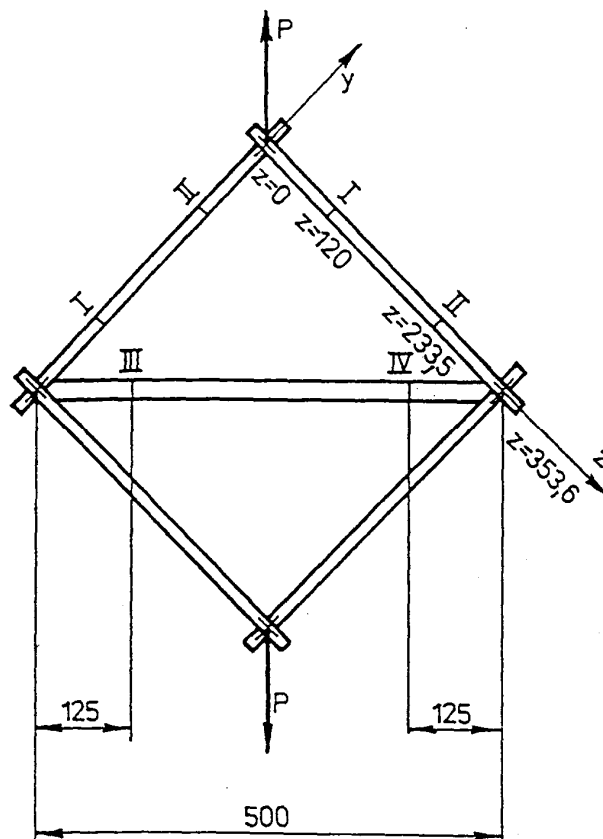
- współrzędne punktów naklejenia tensometrów w odniesieniu do osi głównych przekroju w cm,

- główne centralne momenty bezwładności w cm^4 ,

- przekrój kątownika w cm^2 .

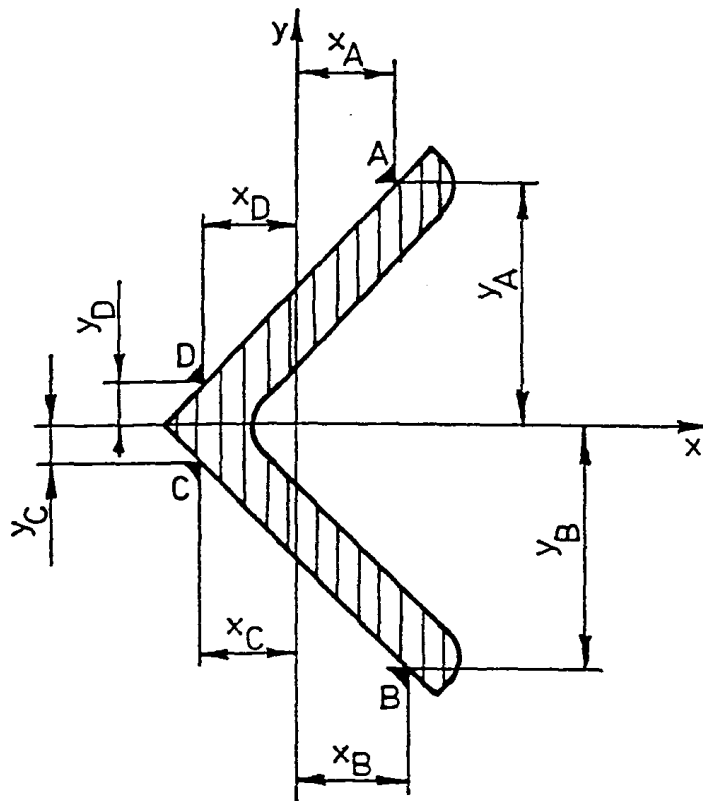
2. Eksperymentalne wyznaczenie sił wewnętrznych.

Celem przeprowadzenia eksperymentu wykonano kratę złożoną z kątowników równoramiennych połączonych z blachami węzłowymi przy pomocy śrub. Schemat prętowy pokazuje rysunek 2.



Rys. 2. Schemat prętowy kratownicy z lokalizacją przekrojów pomiarowych.

Celem obliczenia składowych sił wewnętrznych wykorzystano tensometrię naprężno - oporową. Pomiary naprężeń w punktach A B C o współrzędnych jak na rysunku 3 pozwolą na określenie sił wewnętrznych (N , M_x , M_y) z równań (2). Pomiary należy wykonać w układzie ćwierć mostka (czujnik czynny + czujnik kompensacyjny).



Rys.3. Opis współrzędnych punktów naklejenia tensometrów naprężno – oporowych odniesionych do głównych centralnych osi bezwładności przekroju.

Po dokonaniu pomiarów naprężeń w trzech punktach i wyznaczeniu sił wewnętrznych można przeprowadzić analizę wyników w stosunku do kraty o idealnych węzłach, które momentów nie przenoszą – występują tylko siły osiowe. Siły w prętach kraty na której wykonywane były pomiary wynoszą odpowiednio:

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P$$

$$N_2 = P$$

(momenty zginające są równe zero).

3. Przebieg ćwiczenia:

1. Dokonać pomiaru wymiarów kratownicy.
2. Odczytać charakterystyki geometryczne kątowników :
L 25 x 25 x 3 – pręty rozciągane
L 30 x 30 x 4 – pręt ściskany.
3. Podłączyć punkty pomiarowe do mostka tensometrycznego.
4. Zamocować kratę na maszynie wytrzymałościowej i dokonać pomiarów zerowych M_0 .
5. Obciążyć kratę siłą rozciągającą $P < 7kN$ i dokonać pomiarów M_p .
6. Obliczyć odkształcenia i naprężenia ze wzorów:

$$\varepsilon = (M_p - M_0) \frac{k_0}{k_{rz}} \cdot 10^{-3}$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E [MPa]$$

7. Wyznaczyć ze wzorów (1) siły wewnętrzne N , M_x i M_y .
8. Wyniki pomiarów notować w tabeli (1).
9. Porównać otrzymane wyniki siły wewnętrznej N_d z siłą normalną występującą w przęciu dla kraty idealnej – N_t .

$$\Delta = \frac{N_d - N_t}{N_d} \cdot 100\%$$

Tabela 1. Zestawienie sił wewnętrznych w badanym przęciu.

Lp.	Obciążenie kraty P[N]	Punkt pomiarowy	Naprężenia σ [MPa]	Siły wewnętrzne			Siła normalna N_t [N]
				N_d [N]	M_x [Nm]	M_y [Nm]	
1		I _A					$N_t = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot P$
		I _B					
		I _C					
		I _D					
		II _A					$N_2 = P$
		II _B					
		II _C					
		II _D					