



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Mechanika

Wykład Nr 1

Statyka

literatura, pojęcia podstawowe, wielkości fizyczne, działania na wektorach, rodzaje obciążeń, więzy i reakcje, aksjomaty statyki, środkowy układ sił – redukcja i warunek równowagi, twierdzenie o trzech siłach

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

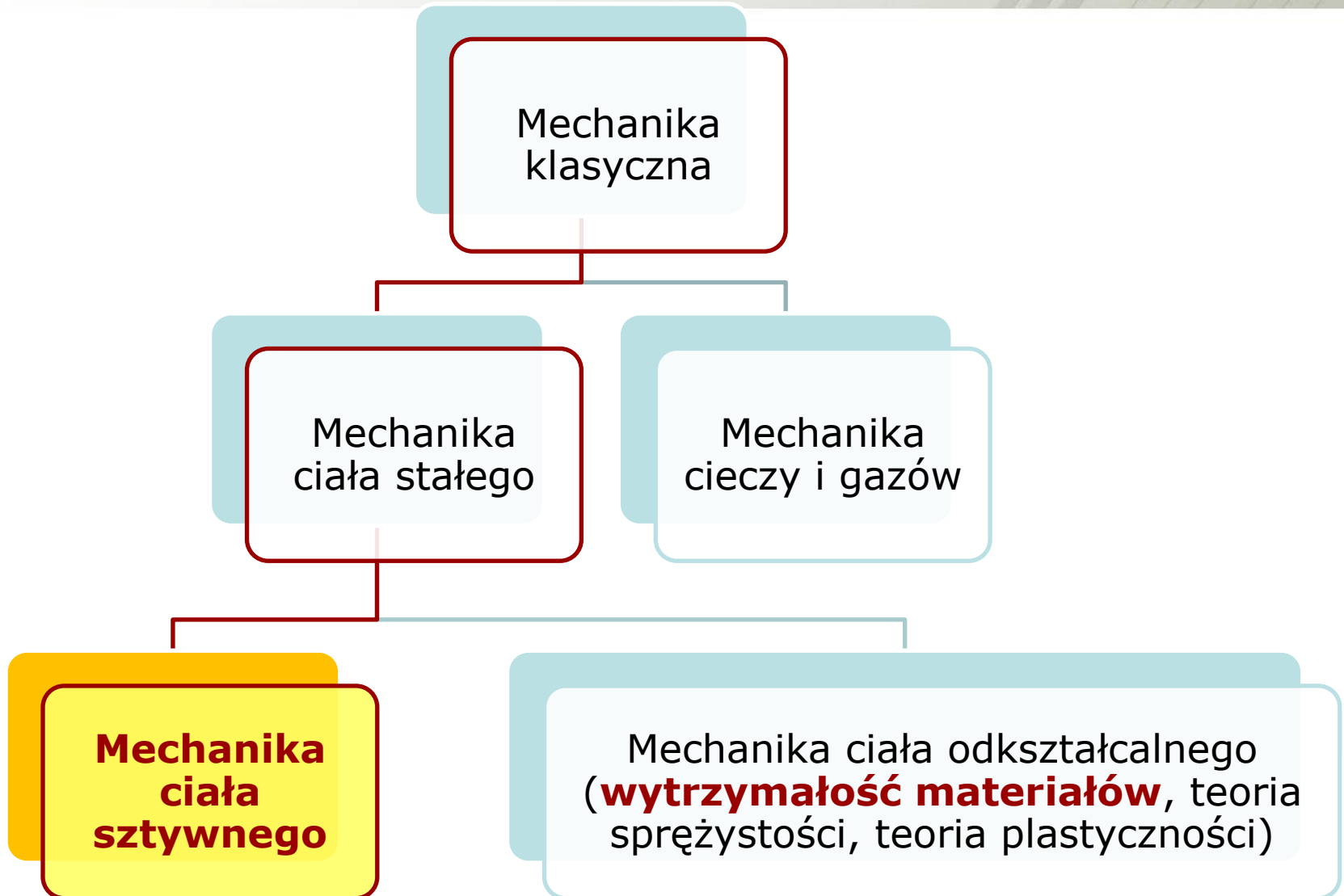
1.1 Polecana literatura:

- 1. Engel Z., Giergiel J.: Mechanika ogólna. Skrypt AGH**
- 2. Giergiel J., Głuch L., Łopata A.: Zbiór zadań z mechaniki – metodyka rozwiązań.**
- 3. Misiak J.: Statyka.**
- 4. Misiak J.: Kinematyka i Dynamika**
- 5. Mieszczerski I.W.: Zbiór zadań z mechaniki.**
- 6. Romicki R.: Rozwiązania zadań z mechaniki Zbioru I. W. Mieszczerskiego.**

1.2. Pojęcia podstawowe:

- Mechanika:** nauka (dział fizyki) zajmująca się badaniem ruchu mechanicznego ciał, tj. przemieszczeniami jednych ciał względem drugich oraz wzajemnymi przemieszczeniami pewnych cząstek danego ciała, w zakresie przyczyn ich powstania oraz zjawisk im towarzyszących.
- Statyka** dział mechaniki zajmujący się badaniem równowagi ciał materialnych.
- Kinematyka** dział mechaniki zajmujący się badaniem ruchu mechanicznego ciał bez uwzględnienia ich cech fizycznych i działających na nie sił..
- Dynamika** dział mechaniki zajmujący się ruchem ciał materialnych pod działaniem sił (określa związki między siłami a ruchem jako ich skutkiem).

1.2. Pojęcia podstawowe:



Wyidealizowane modele ciał rzeczywistych:

punkt materialny	punkt geometryczny któremu przepisano pewną masę.
układ punktów materialnych	(ciało sztywne, bryła) – zbiór punktów materialnych o niezmiennych wzajemnych odległościach
ciało swobodne	ciało mogące dowolnie przemieszczać się w przestrzeni.
ciało nieswobodne	ciało którego ruch w przestrzeni ograniczony jest określonymi więzami.

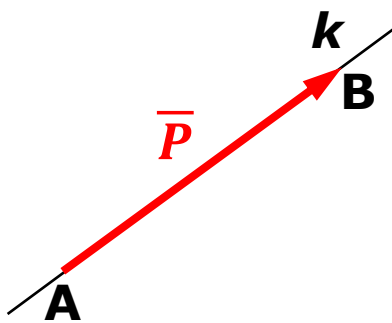
1.3. Wielkości stosowane w mechanice:

a) skalary

wielkości określone wartością liczbową i jednostką mianowaną (masa, czas, długość, pole).

b) wektory

wielkości do określenia których niezbędne jest podanie oprócz wartości (modułu) także kierunku (prostej działania) oraz zwrotu wzdłuż tego kierunku



Wektor można zdefiniować poprzez podanie trzech liczb algebraicznych przedstawiających jego trzy rzuty prostokątne P_x , P_y , P_z (składowe wektora) na osie układu współrzędnych.

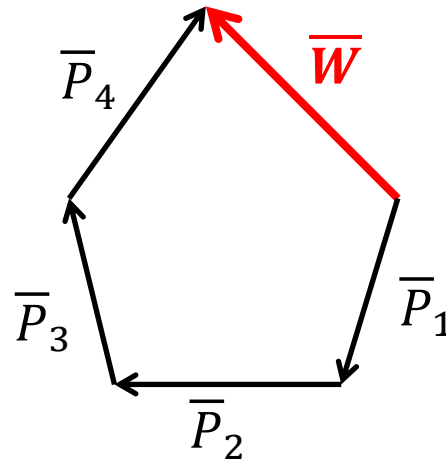
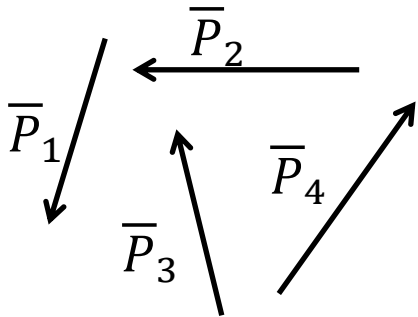
$$\bar{P} = (P_x, P_y, P_z) \quad \text{wówczas:} \quad \begin{cases} \bar{P} = \bar{P}_x + \bar{P}_y + \bar{P}_z \\ P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \end{cases}$$

1.3.1. Dziesiętne krotności jednostek

Mnożnik	Przedrostek	Skrót	Przykłady
10^{18}	<i>eksa -</i>	<i>E</i>	
10^{15}	<i>peta -</i>	<i>P</i>	
10^{12}	<i>tera -</i>	<i>T</i>	
10^9	<i>giga -</i>	<i>G</i>	<i>GPa</i>
10^6	<i>mega -</i>	<i>M</i>	<i>MN, MPa</i>
10^3	<i>kilo -</i>	<i>k</i>	<i>kg, kW</i>
10^2	<i>hekto -</i>	<i>h</i>	<i>hPa, hl</i>
10^1	<i>deka -</i>	<i>da</i>	<i>dag,</i>
1	<i>-----</i>	<i>-----</i>	<i>N, m, g, Pa, W</i>
10^{-1}	<i>decy -</i>	<i>d</i>	<i>dm</i>
10^{-2}	<i>centy -</i>	<i>c</i>	<i>cm</i>
10^{-3}	<i>mili -</i>	<i>m</i>	<i>mm, mg</i>
10^{-6}	<i>mikro -</i>	μ	μm
10^{-9}	<i>nano -</i>	<i>n</i>	<i>nA</i>
10^{-12}	<i>piko -</i>	<i>p</i>	
10^{-15}	<i>femto -</i>	<i>f</i>	
10^{-18}	<i>atto -</i>	<i>a</i>	

1.3.2. Podstawowe działania na wektorach

a) Dodawanie wektorów:



$$\bar{W} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n$$

$$\bar{W} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$$

jeżeli:

$$\bar{P}_1 = (P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$$

$$\bar{P}_2 = (P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$$

.....

$$\bar{P}_n = (P_{nx}, P_{ny}, P_{nz})$$

wówczas:

$$\bar{W} = (W_x, W_y, W_z)$$

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix}$$

$$W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy}$$

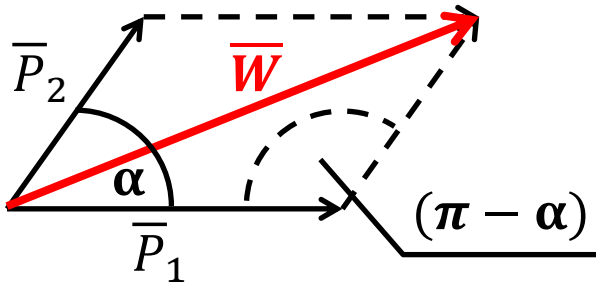
$$W_z = \sum_{i=1}^n P_{iz}$$

$$\bar{W} = \bar{W}_x + \bar{W}_y + \bar{W}_z$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$$

a) Dodawanie wektorów:

Wzór Carnota (twierdzenie cosinusów)



$$\vec{W} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

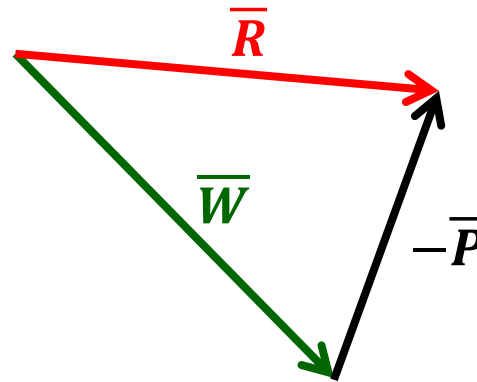
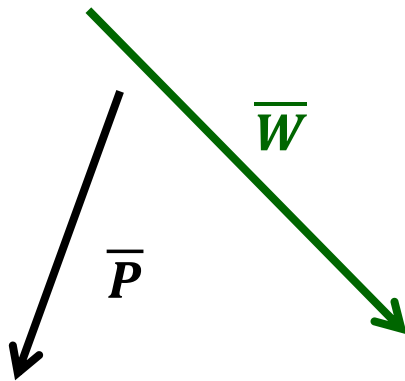
$$W = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos(\pi - \alpha)}$$



$$W = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\alpha}$$

b) Odejmowanie wektorów:

Odejmowanie wektora \bar{P} od wektora \bar{W} odpowiada dodaniu do wektora \bar{W} wektora przeciwnego do \bar{P} .



$$\bar{R} = \bar{W} - \bar{P} = \bar{W} + (-\bar{P})$$

jeżeli:

$$\bar{W} = (W_x, W_y, W_z)$$

$$\bar{P} = (P_x, P_y, P_z)$$

wówczas:

$$\bar{R} = \bar{W} - \bar{P} = (R_x, R_y, R_z), \text{ gdzie:}$$

$$R_x = W_x - P_x$$

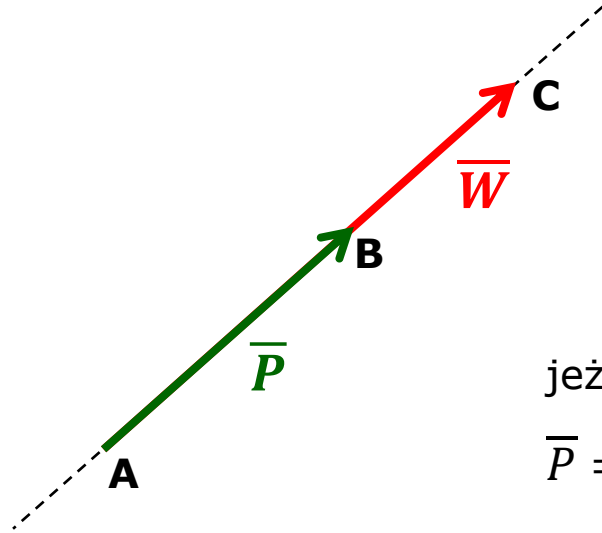
$$R_y = W_y - P_y$$

$$R_z = W_z - P_z$$

c) Mnożenie wektorów przez liczbę (skalar):

Wynikiem iloczynu wektora \vec{P} przez skalar n jest wektor \vec{W} o kierunku zgodnym z wektorem \vec{P} i module n razy większym od modułu wektora \vec{P} .

Zwrot wektora \vec{W} jest zgodny z wektorem \vec{P} gdy $n > 0$, lub przeciwny gdy $n < 0$.



$$\left. \begin{array}{l} P = |AB| \\ W = |AC| \\ \vec{W} = n \cdot \vec{P} \end{array} \right\} \frac{W}{P} = \frac{|AC|}{|AB|} = n$$

jeżeli:

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$$

wówczas:

$$\vec{W} = n\vec{P} = (W_x, W_y, W_z), \text{ gdzie:}$$

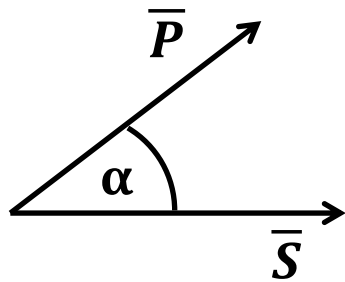
$$W_x = n \cdot P_x$$

$$W_y = n \cdot P_y$$

$$W_z = n \cdot P_z$$

d) Iloczyn skalarny dwóch wektorów:

Wynikiem iloczynu skalarnego wektora \vec{P} i wektora \vec{S} jest skalar równy iloczynowi modułów wektorów \vec{P} i \vec{S} oraz cosinusa kąta zawartego między nimi.



$$W = \vec{P} \circ \vec{S} = P \cdot S \cdot \cos(\alpha)$$

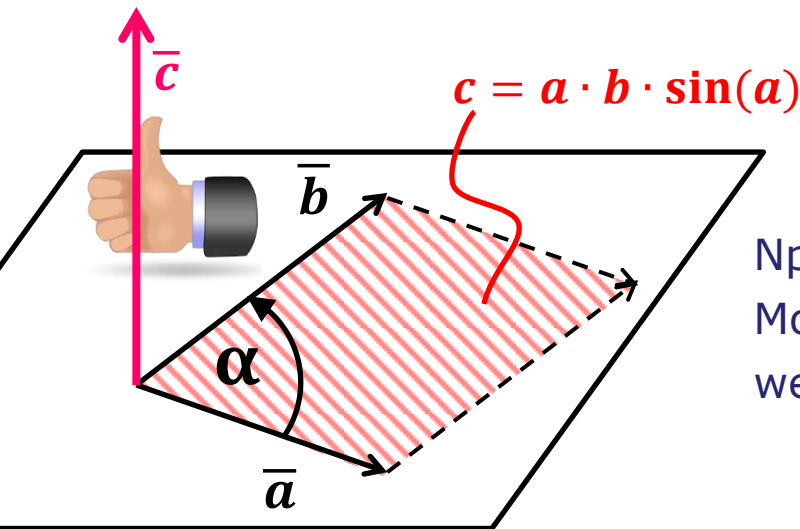
Np.

Praca jest iloczynem skalarnym siły i przemieszczenia.

Iloczyn skalarny jest przemienny, tj.: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

e) Iloczyn wektorowy dwóch wektorów:

Wynikiem wektorowym wektora \vec{a} przez wektor \vec{b} ($\vec{a} \times \vec{b}$) jest wektor \vec{c} prostopadły do płaszczyzny wektorów \vec{a} i \vec{b} oraz module równym polu równoległoboku zbudowanego na wektorach \vec{a} i \vec{b} (moduł wektora \vec{c} jest równy iloczynowi modułów wektorów \vec{a} i \vec{b} i sinusa kąta zawartego między nimi). Zwrot wektora \vec{c} określa się zgodnie z regułą prawej dłoni, stosownie do założenia o prawoskrętności kartezjańskiego układu współrzędnych.



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$c = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

Np.

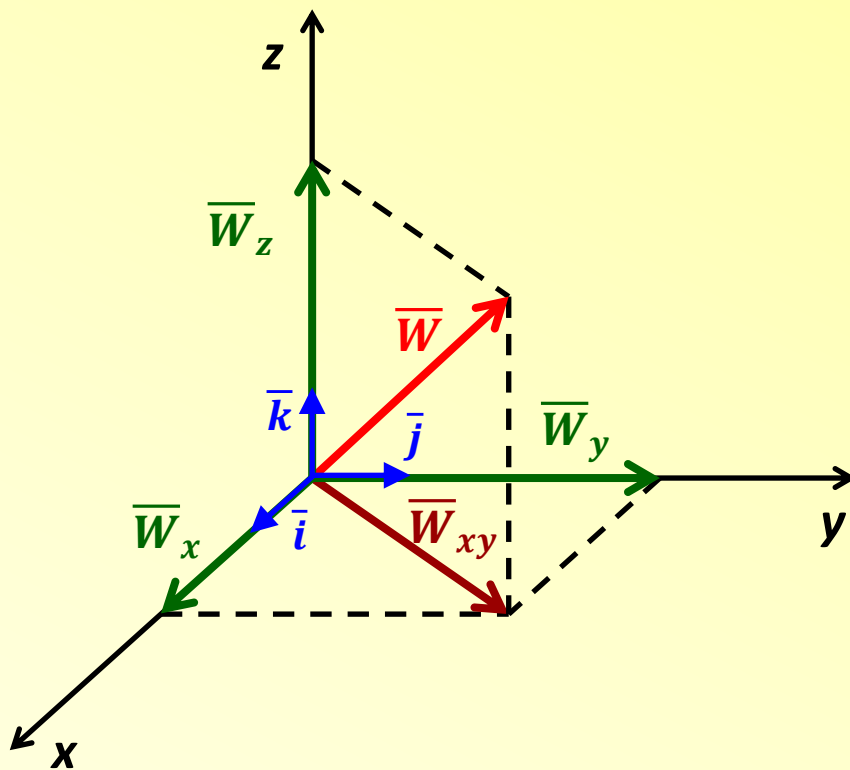
Moment siły względem bieguna jest iloczynem wektorowym promienia wodzącego przez wektor siły.

Mnożenie wektorowe nie jest przemienne: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

1.3.2. Podstawowe działania na wektorach

e) Iloczyn wektorowy dwóch wektorów:

Wersory – wektory jednostkowe: $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$

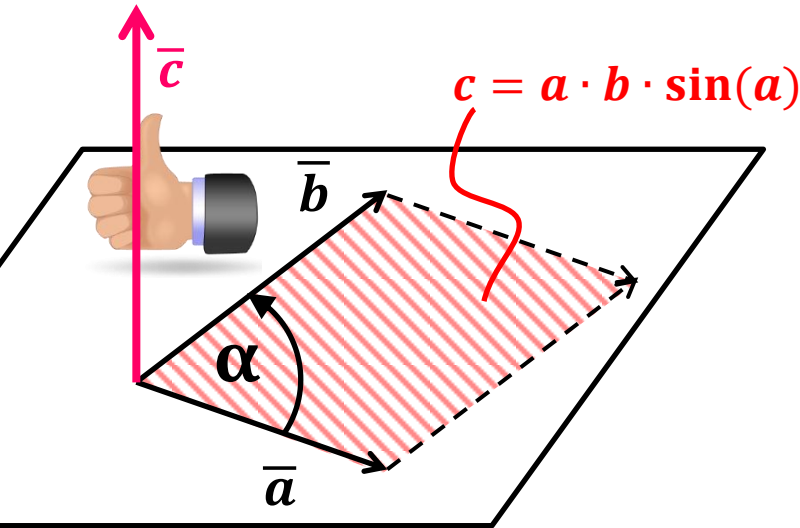


$$\bar{W} = (W_x, W_y, W_z)$$

$$\bar{W} = \bar{W}_x + \bar{W}_y + \bar{W}_z$$

$$\bar{W} = W_x \cdot \bar{i} + W_y \cdot \bar{j} + W_z \cdot \bar{k}$$

e) Iloczyn wektorowy dwóch wektorów:



$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$$

$$c = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

jeżeli:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$$

$$\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$$

wówczas:

$$\begin{aligned} \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} \\ &= c_x \cdot \bar{i} + c_y \cdot \bar{j} + c_z \cdot \bar{k} \end{aligned}$$

gdzie: $c_x = (a_y b_z - a_z b_y)$; $c_y = (a_z b_x - a_x b_z)$; $c_z = (a_x b_y - a_y b_x)$

$$\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

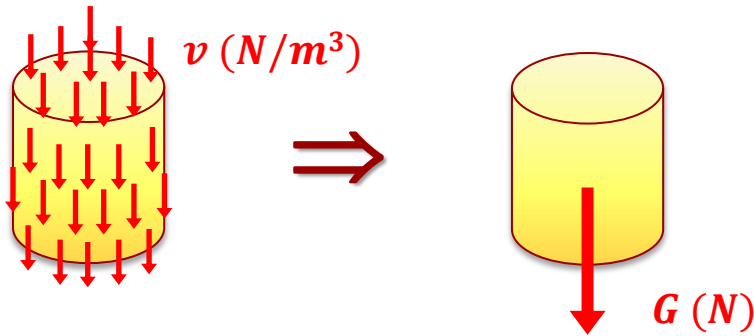
Siła – wynik wzajemnego oddziaływania ciał na siebie.

Rodzaje sił – ze względu na pochodzenie

- a) siły zewnętrzne** – przyłożone do danego ciała, wywierane przez inne ciało,
- **czynne** – mogące wywołać ruch, niezależne od warunków w jakich znajduje się dane ciało,
 - **bierne** – stanowią wynik oddziaływania więzów (siły reakcji),
- b) siły wewnętrzne** – siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy punktami materialnymi rozpatrywanego układu,

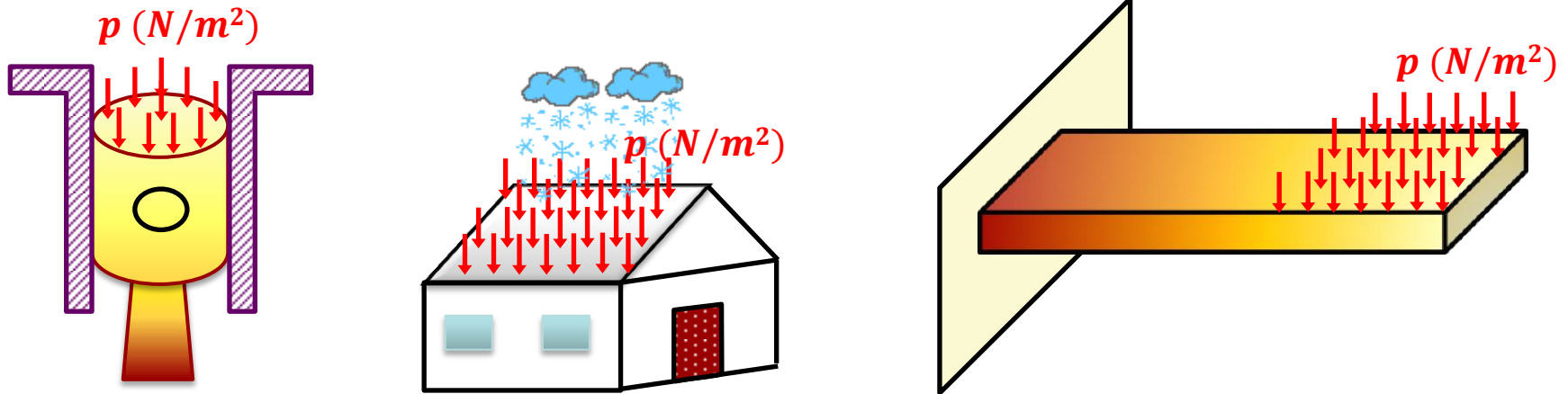
Rodzaje obciążeń – ze względu na sposób przyłożenia:

a) objętościowe (masowe) – działające na każdą cząstkę ciała (np. siły ciężkości),



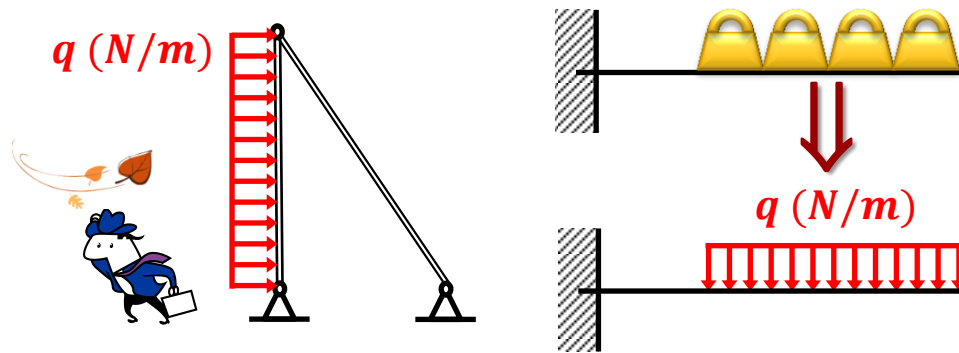
siły masowe zwykle zastępowane są działaniem siły skupionej przyłożonej w środku ciężkości bryły

b) powierzchniowe – działające na powierzchnię ciała,



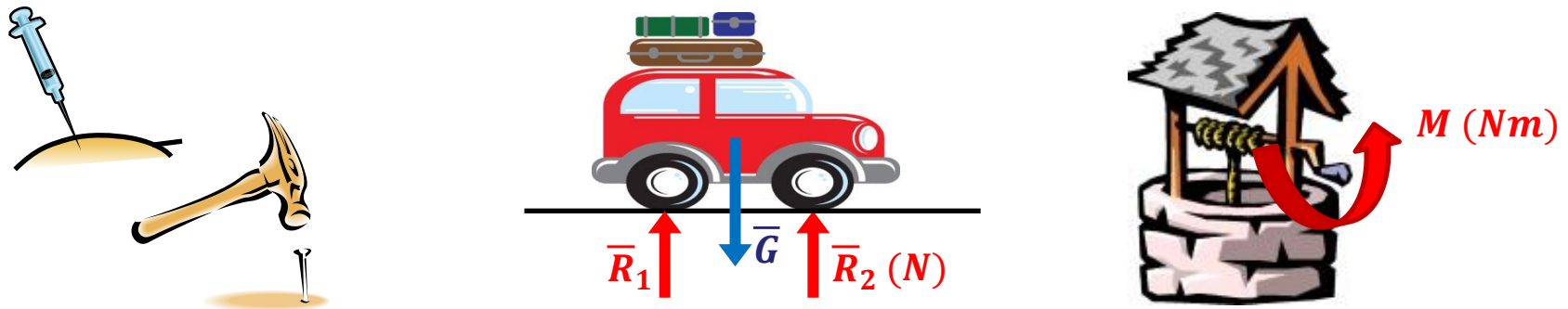
Rodzaje obciążeń – ze względu na sposób przyłożenia:

c) obciążenia liniowe – przyłożone w sposób ciągły na pewnej długości,



Zazwyczaj za pomocą obciążenia liniowego odwzorowuje się działanie obciążenia powierzchniowego w przypadku modeli płaskich

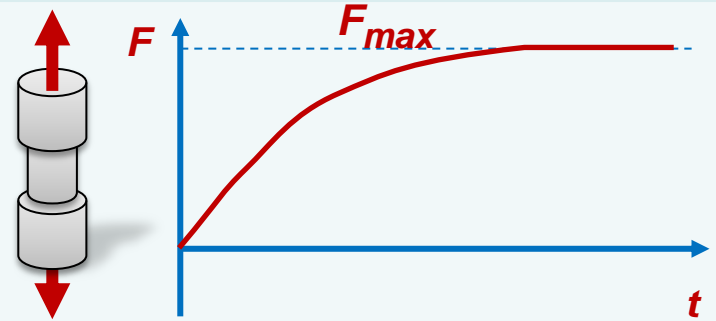
d) obciążenie skupione – siła lub moment siły przyłożone w punkcie,



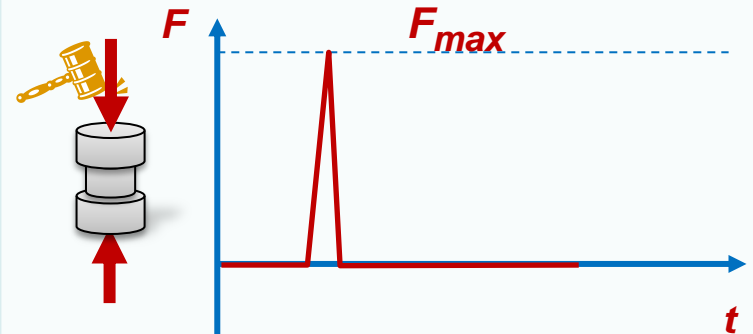
Dane obciążenie uznać można za skupione, jeżeli powierzchnia jego oddziaływania jest znacznie mniejsza od wymiarów elementu.

Rodzaje obciążeń – ze względu na zmiany w czasie:

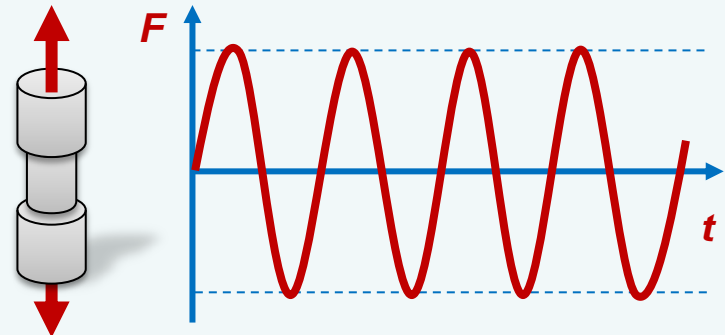
a) statyczne – narastające w sposób powolny od zera do pewnej wartości



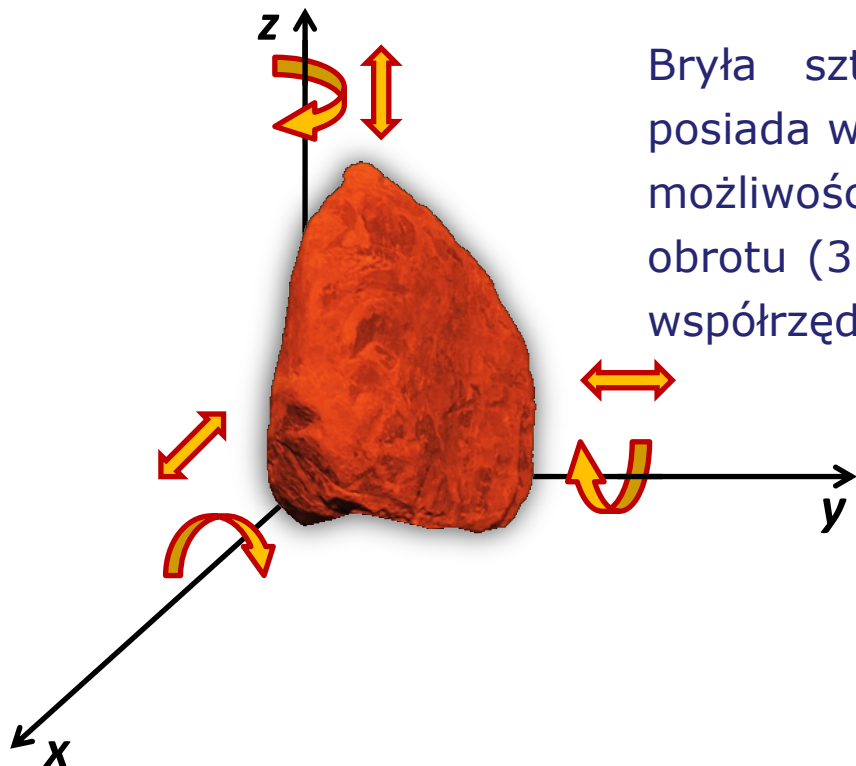
b) dynamiczne – przyłożone w sposób nagły, działające impulsowo



c) okresowo-zmienne – zmieniające wielokrotnie wartość w czasie



Stopień swobody – minimalna liczba niezależnych współrzędnych niezbędna do jednoznacznego opisu położenia ciała w przestrzeni.



Bryła sztywna, nieograniczona żadnymi węzami, posiada w przestrzeni 6 stopni swobody, związanych z możliwością jej przesunięcia (3 stopnie swobody) i obrotu (3 kolejne stopnie swobody) wokół osi układu współrzędnych.

1.5. Stopień swobody

Stopień swobody – minimalna liczba niezależnych współrzędnych niezbędna do jednoznacznego opisu położenia ciała w przestrzeni.

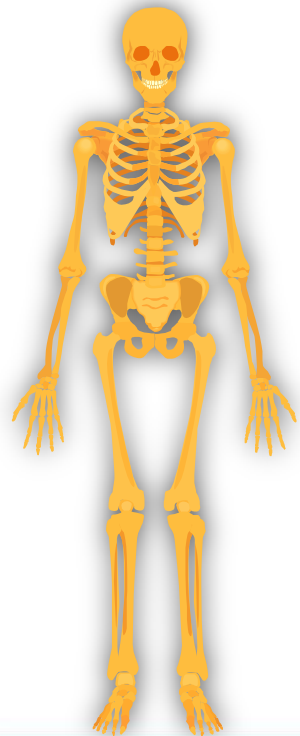
Ciało materialne (np. człon mechanizmu) w ruchowym połączeniu z innym ciałem tworzy **parę kinematyczną** tracąc przy tym pewną liczbę stopni swobody, określoną przez tzw. **klasę pary kinematycznej**, tj. liczbę **więzów** występujących pomiędzy połączonymi członami.

Ogólnie, jeżeli dwa człony o odpowiednio n_1 i n_2 stopniach swobody połączone są w parę kinematyczną o klasie w , to układ taki ma $(n_1 + n_2 - w)$ stopni swobody.

Przykładowo:

Ludzki szkielet posiada ok. 240 stopni swobody.

Każda z kończyn – górna jak i dolna – mają po około 30.



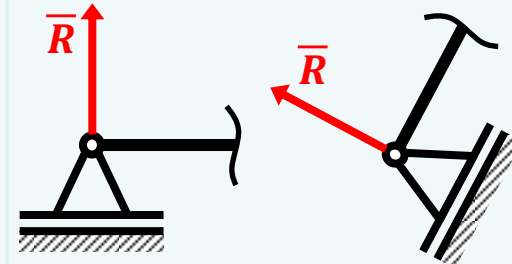
1.6. Więzy oraz siły reakcji

Więzy – elementy ograniczające liczbę stopni swobody.

Charakterystyczne rodzaje więzów i związane z nimi siły reakcji.

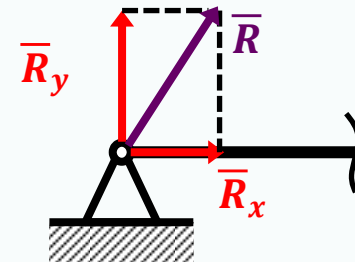
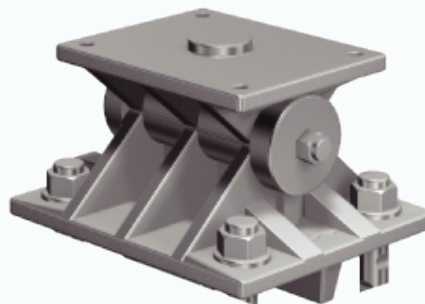
a) podpora przegubowa przesuwna

reakcja prostopadła do płaszczyzny przesuwu



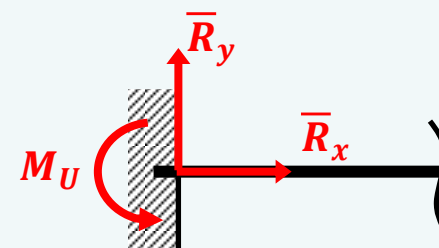
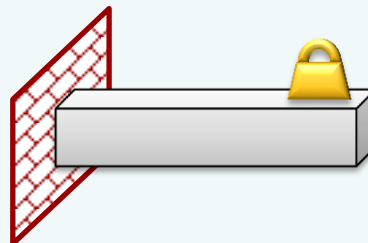
b) podpora przegubowa stała

siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji)



c) utwierdzenie (wspornik)

siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji) oraz moment utwierdzenia



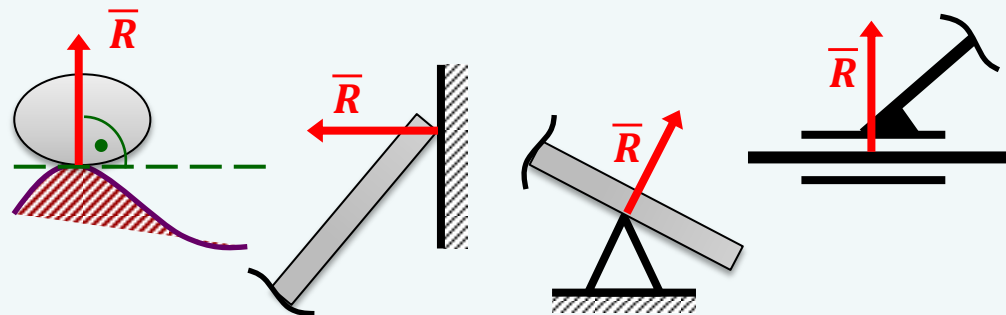
1.6. Więzy oraz siły reakcji

Więzy – elementy ograniczające liczbę stopni swobody.

Charakterystyczne rodzaje więzów i związane z nimi siły reakcji.

d) gładka powierzchnia oporowa

reakcja prostopadła do gładkiej powierzchni



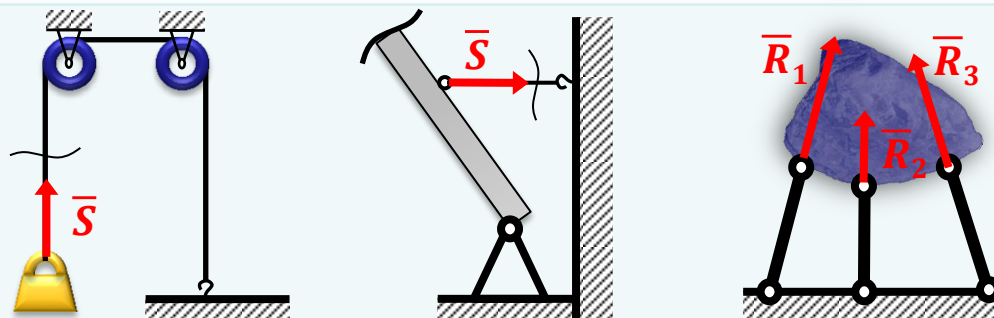
e) przegub kulisty

siła reakcji o dowolnym kierunku (trzy składowe reakcji)



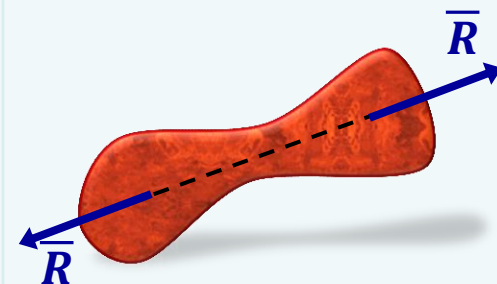
f) podwieszenie na cięgnach, podparcie przegubowe

siła reakcji działa wzdłuż cięgna lub nieważkiego pręta

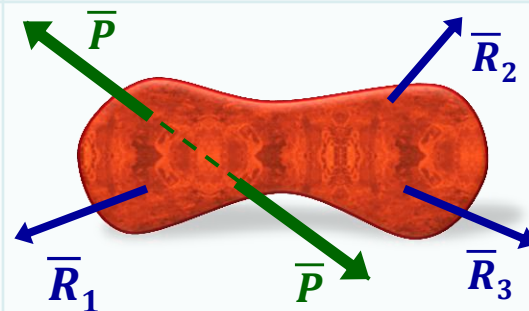


Aksjomaty – postulaty, których się nie dowodzi, przyjmowane jako pewnik.

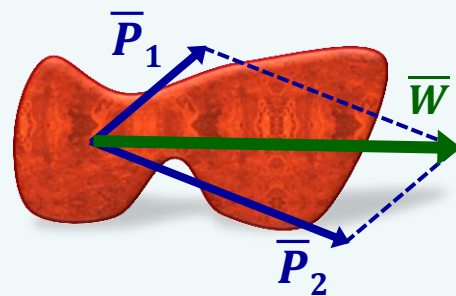
1) Dwie siły równoważą się wzajemnie jeśli mają jednakowe wartości (moduły), działają wzdłuż jednego kierunku i mają przeciwne zwroty.



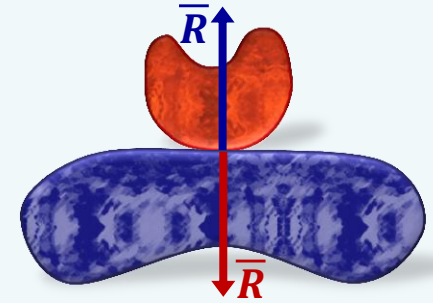
2) Działanie układu sił działających na ciało nie ulegnie zmianie, jeżeli dodamy do niego lub odejmiemy od niego układ sił równoważny zeru.



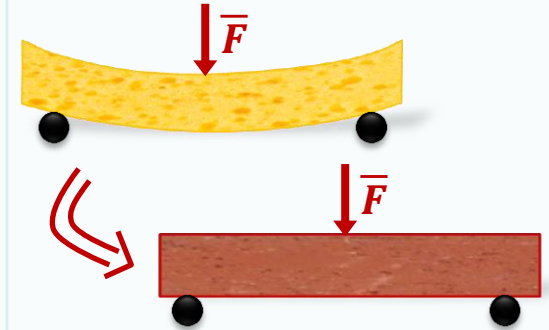
3) Wypadkowa dwóch sił przechodzi przez punkt ich przecięcia i wyraża się długością przekątnej równoległoboku zbudowanego na tych siłach (jest wektorem sumą sił składowych).



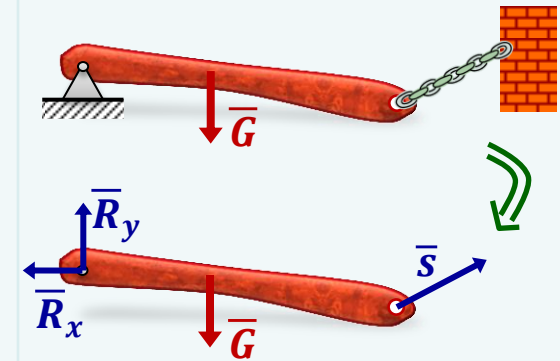
4) Wszelkiemu działaniu siły odpowiada równe i przeciwne skierowane przeciwdziałanie.



5) Równowaga ciała odkształcalnego nie zostanie naruszana jeżeli ciało to stanie się ciałem sztywnym.

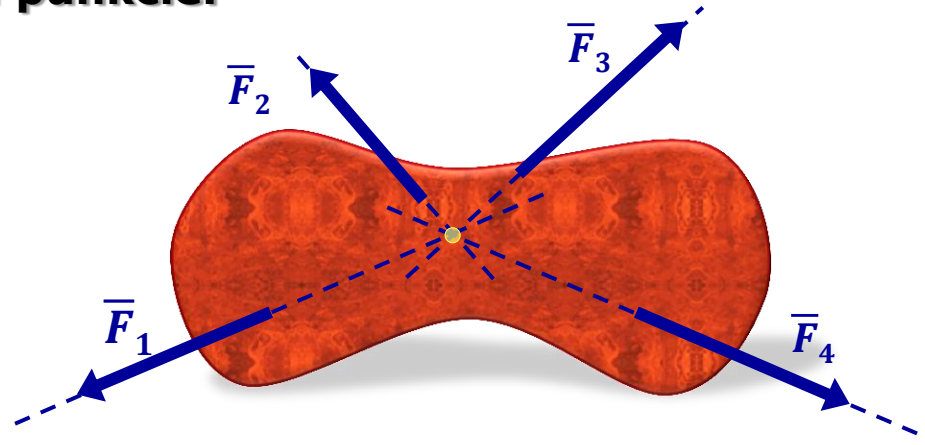


6) Ciało nieswobodne możemy traktować jak ciało swobodne jeżeli myślowo uwolnili się je od więzów, zastępując ich działanie odpowiednimi reakcjami.

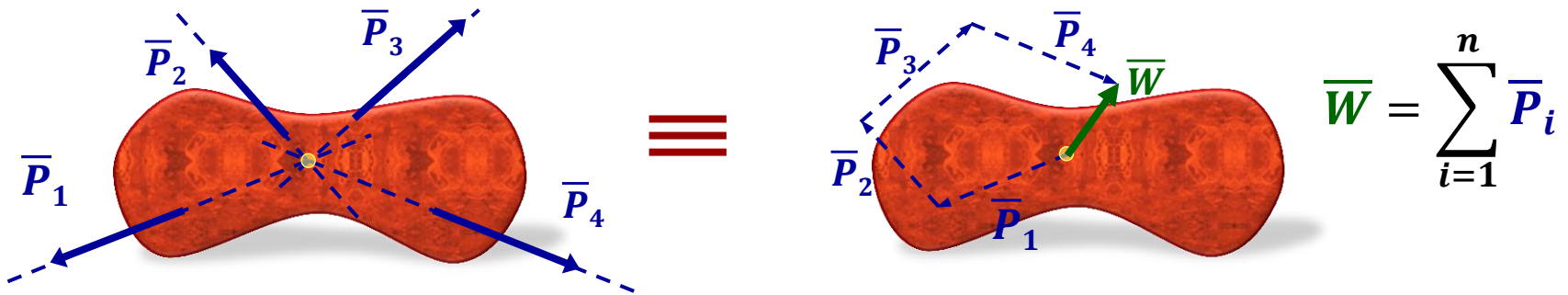


1.8. Środkowy układ sił (zbieżny układ sił)

Środkowy układ sił (zbieżny układ sił) – układ sił których linie działania przecinają się w jednym punkcie.

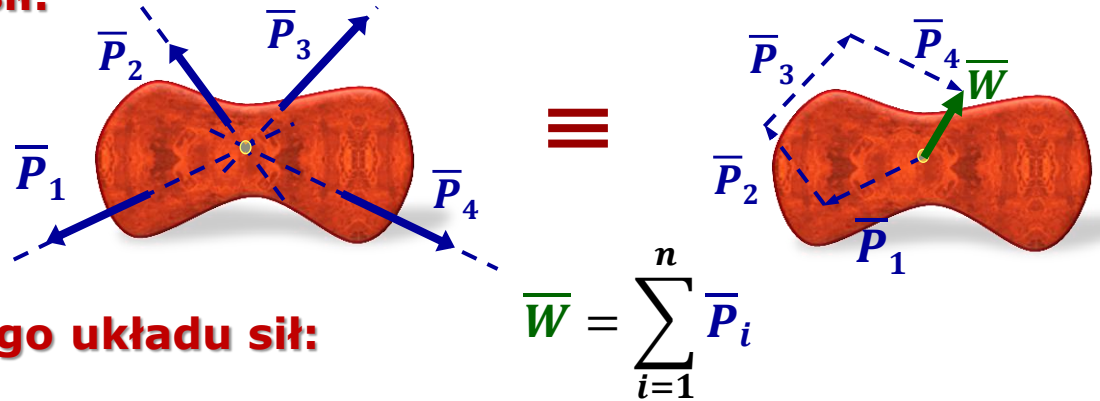


Redukcja środkowego układu sił: środkowy układ sił można zastąpić działaniem jednej siły wypadkowej – **wektora głównego** – będącego sumą wszystkich sił działających na ciało, przyczepionego w punkcie przecięcia ich kierunków działania.



1.9. Środkowy układ sił – warunki równowagi

Redukcja środkowego układu sił:



Warunki równowagi środkowego układu sił:

a) w zapisie wektorowym:

$$\bar{W} = 0 \Rightarrow \bar{W} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = 0$$

Zbieżny układ sił jest w równowadze, gdy wielobok sił działających na ciało jest wielobokiem zamkniętym (wektor główny jest równy zero)

b) w ujęciu analitycznym:

$$\bar{W} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = 0 \Rightarrow$$

Warunki
równowagi
płaskiego
środkowego
układu sił

$$W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0$$

$$W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0$$

$$W_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

Warunki
równowagi
przestrzennego
środkowego
układu sił

Przykład 1.1:

Obliczyć naciągi w linkach AB i AC, jeżeli w punkcie A podwieszono ciężar G .

Dane:

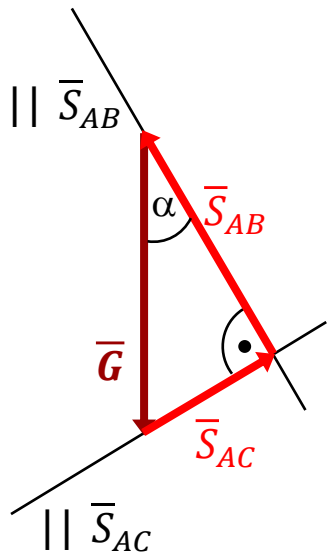
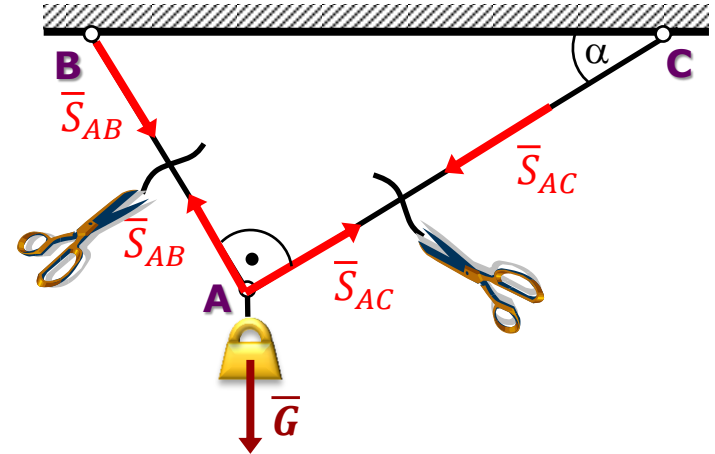
$$G = 400 \text{ N}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Szukane:

$$S_{AB}, S_{AC}$$

Metoda grafo-analityczna:



$$S_{AB} = G \cdot \cos \alpha = 400 \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 200\sqrt{2} \text{ N}$$

$$S_{AC} = G \cdot \sin \alpha = 400 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 200 \text{ N}$$

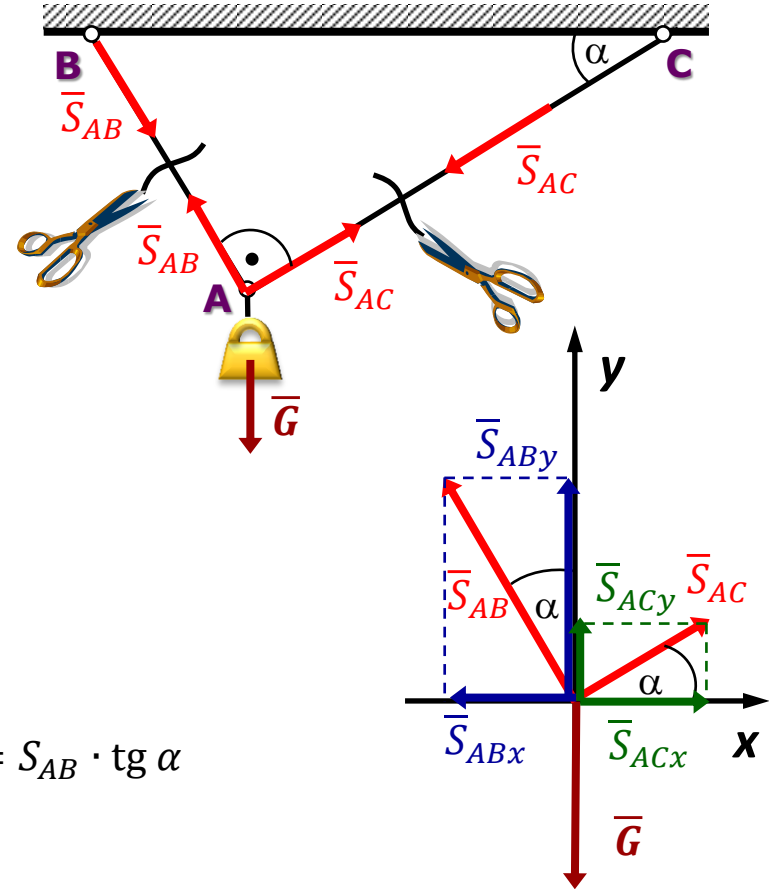
1.9. Środkowy układ sił – warunki równowagi

Przykład 1.1:

Obliczyć naciągi w linkach AB i AC, jeżeli w punkcie A podwieszono ciężar G .

Dane:
 $G = 400 \text{ N}$
 $\alpha = 30^\circ$

Szukane:
 S_{AB}, S_{AC}



Metoda analityczna:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 & \Rightarrow S_{ACx} - S_{ABx} = 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 & \Rightarrow S_{ABy} + S_{ACy} - G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{AC} \cdot \cos \alpha - S_{AB} \cdot \sin \alpha = 0 & \Rightarrow S_{AC} = S_{AB} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = S_{AB} \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ S_{AB} \cdot \cos \alpha + S_{AC} \cdot \sin \alpha - G = 0 \end{cases}$$

$$S_{AB} \cdot \cos \alpha + S_{AB} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha - G = 0 \Rightarrow S_{AB} = \frac{G}{\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{G \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = G \cdot \cos \alpha$$

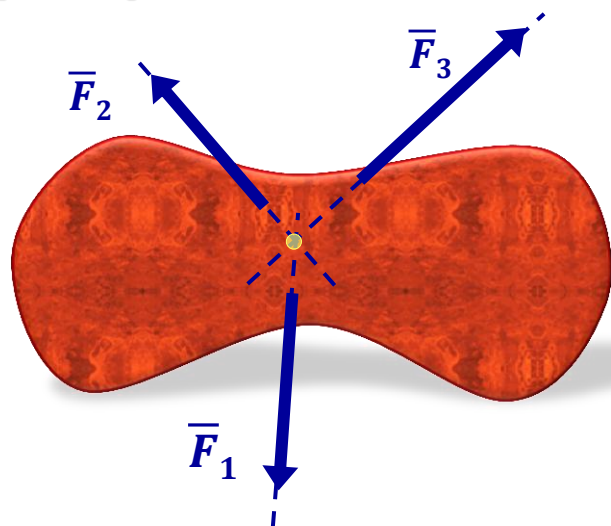
$$S_{AB} = 200\sqrt{3} \text{ N}$$

$$S_{AC} = S_{AB} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = S_{AB} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 200 \text{ N}$$

Twierdzenie o trzech siłach:

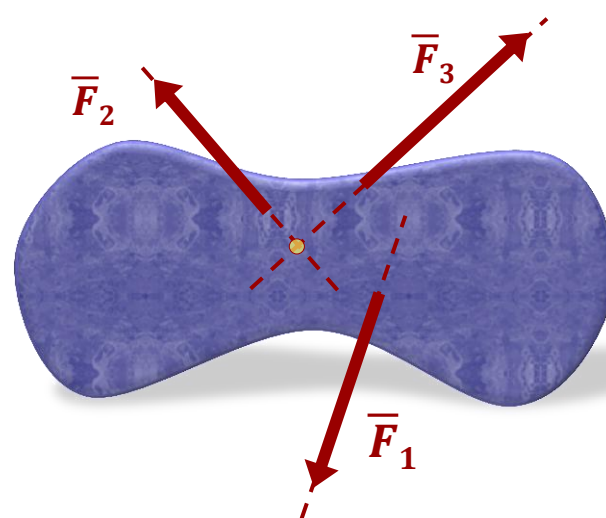
Układ trzech sił jest w równowadze jeżeli kierunki działania tych sił przecinają się w jednym punkcie (siły tworzą układ zbieżny) oraz wielobok utworzony z tych sił jest wielobokiem zamkniętym.

Przykłady:



Układ sił równoważących się pod warunkiem:

$$\bar{W} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$$



Układ sił nie mogący się równoważyć, nawet jeśli:

$$\bar{W} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = 0$$

Przykład 1.2:

Obliczyć reakcje w łożyskach A i B konstrukcji jak na rysunku.

Dane:

$$P = 13 \text{ kN}$$

$$b = 75 \text{ cm}$$

$$h = 130 \text{ cm}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

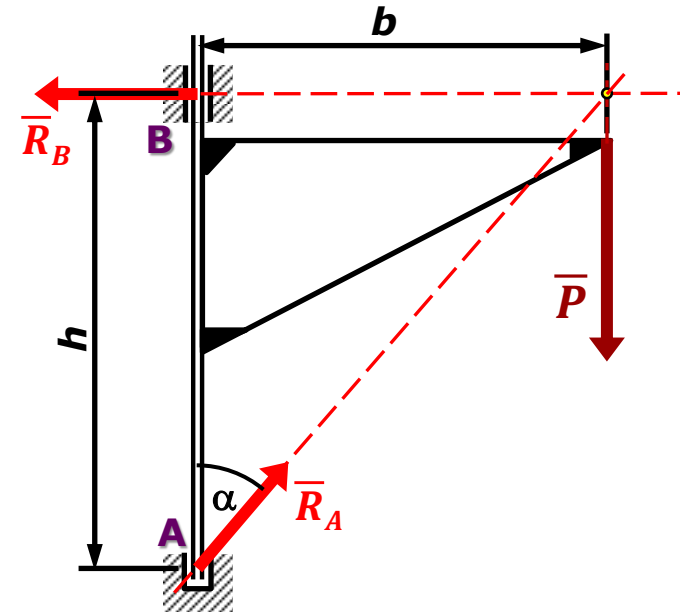
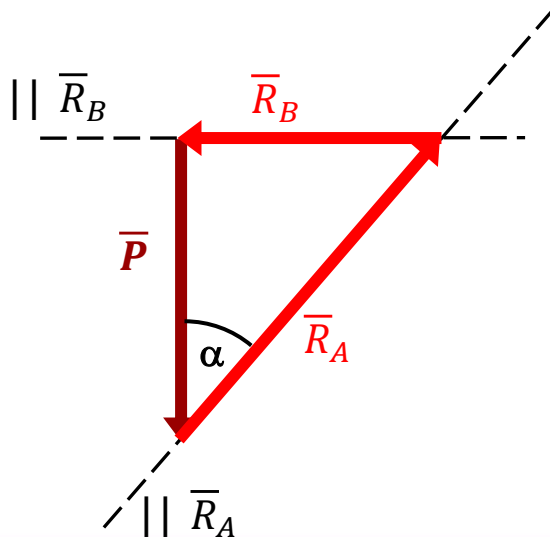
Szukane:

$$R_A, R_B$$

Z twierdzenia o trzech siłach:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{b}{h}\right) = \arctg\left(\frac{75}{130}\right) \approx 30^\circ$$

Metoda grafo-analityczna:



$$R_A = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{P}{\cos 30^\circ} = \frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{26\sqrt{3}}{3} \approx \mathbf{15 \text{ kN}}$$

$$R_B = R_A \cdot \sin \alpha = \frac{26\sqrt{3}}{3} \cdot 0,5 \approx \mathbf{7,5 \text{ kN}}$$

1.10. Środkowy układ sił – twierdzenie o trzech siłach

Przykład 1.2:

Obliczyć reakcje w łożyskach A i B konstrukcji jak na rysunku.

Dane:

$$P = 13 \text{ kN}$$

$$b = 75 \text{ cm}$$

$$h = 130 \text{ cm}$$

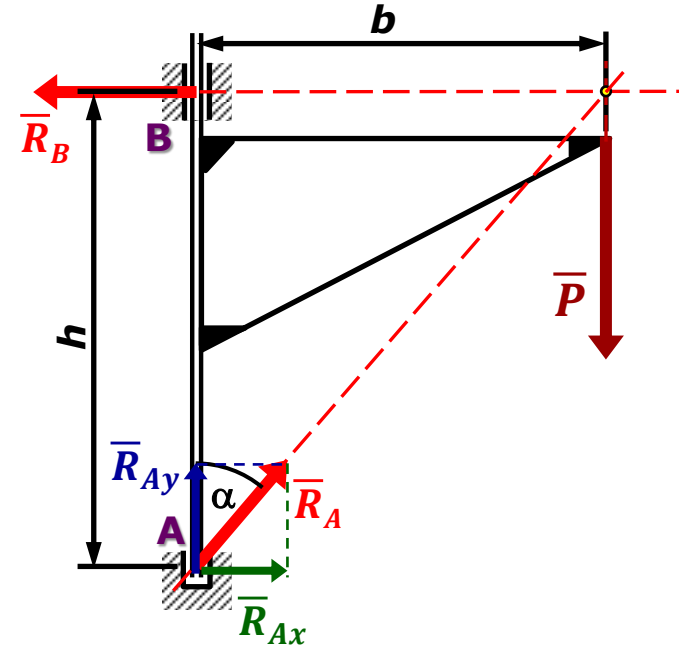
$$\alpha = 30^\circ$$

Szukane:

$$R_A, R_B$$

Z twierdzenia o trzech siłach:

$$\alpha = \arctg\left(\frac{b}{h}\right) = \arctg\left(\frac{75}{130}\right) \approx 30^\circ$$



Metoda analityczna:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \\ \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R_B + R_{Ax} = 0 \\ -P + R_{Ay} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -P + R_A \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{P}{\cos \alpha} = \frac{13}{\cos \alpha} = \frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{26\sqrt{3}}{3} \approx 15 \text{ kN}$$

$$-R_B + R_{Ax} = 0 \Rightarrow R_B = R_A \cdot \sin \alpha = \frac{26\sqrt{3}}{3} \cdot 0,5 \approx 7,5 \text{ kN}$$

MOMENT SIŁY

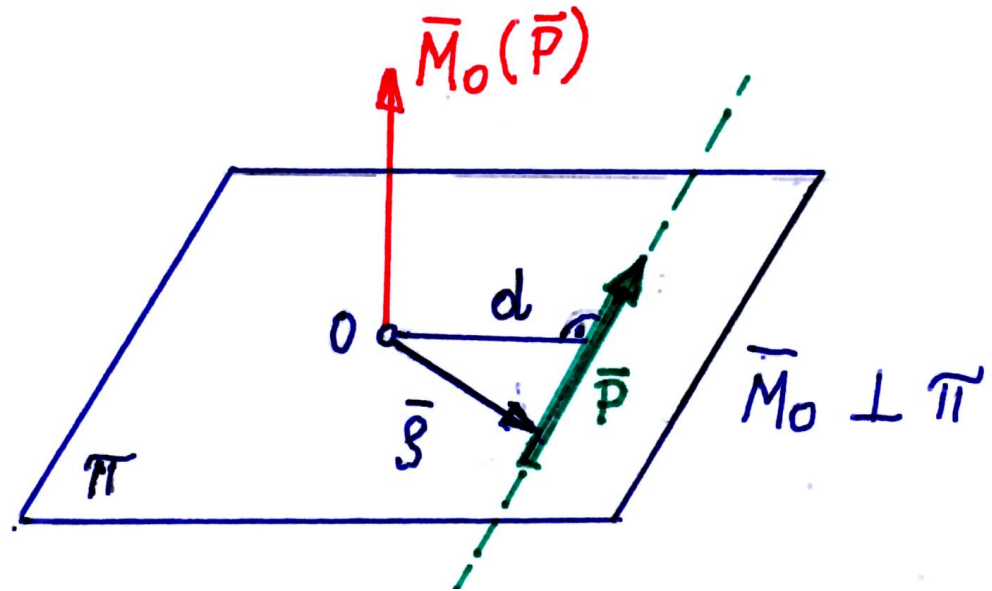
Definicja

Moment siły \vec{P} względem punktu (bieguna) O:

$$\vec{M}_o(\vec{P}) = \vec{\rho} \times \vec{P}$$

Wartość wektora momentu:

$$M_o(\vec{P}) = P \cdot \rho \cdot \sin \angle(\vec{\rho}, \vec{P}) = P \cdot d$$



Wektor momentu jest prostopadły do płaszczyzny \vec{P} i $\vec{\rho}$.

Zwrot: patrząc od strony strzałki \vec{M} obrót siły przeciwny do wskazówek zegara.

Współrzędne wektora momentu $\bar{M}_o(M_x, M_y, M_z)$ oblicza się jako minory wyznacznika

$$\bar{M}_o = \bar{i}M_x + \bar{j}M_y + \bar{k}M_z$$

$$\bar{M}_o(\bar{P}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_o & y_o & z_o \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – wersory osi

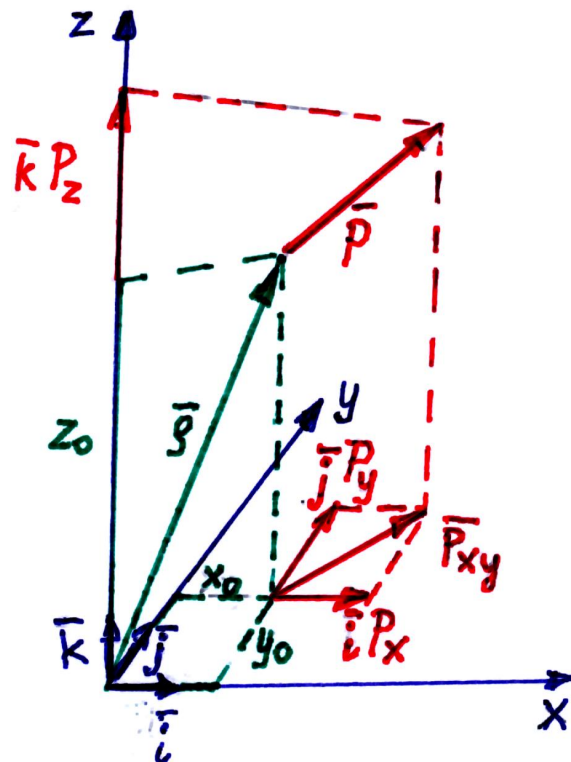
$$\bar{\rho}(x_o, y_o, z_o)$$

$$\bar{P}(P_x, P_y, P_z)$$

$$M_x = P_z y_o - P_y z_o$$

$$M_y = P_x z_o - P_z x_o$$

$$M_z = P_y x_o - P_x y_o$$



Wartość wektora momentu:

$$M_o(\bar{P}) = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

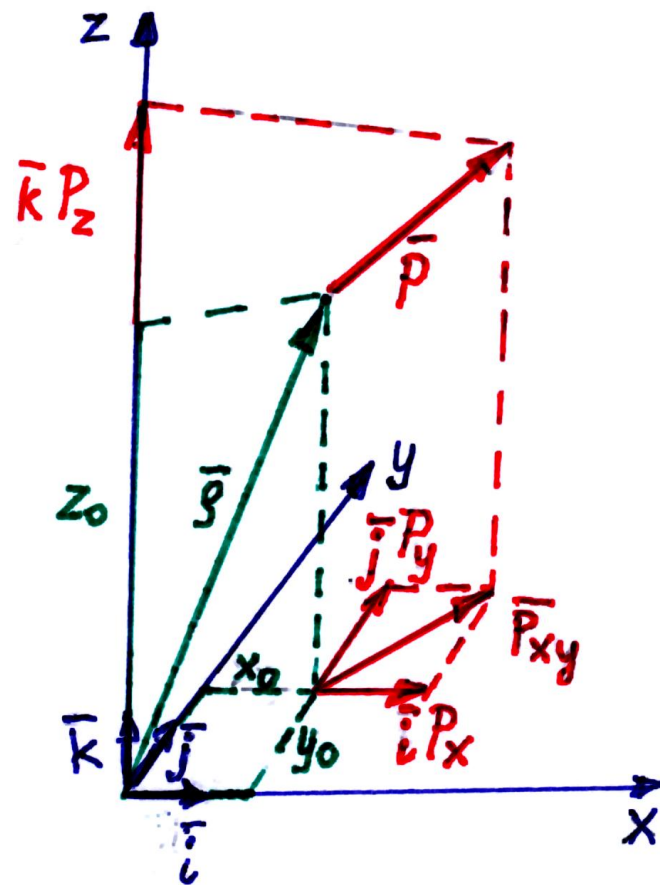
M_x, M_y, M_z – momenty siły \bar{P} względem osi x, y, z.

Moment siły względem osi jest to moment rzutu tej siły na płaszczyznę prostopadłą do osi
liczony względem punktu przebiecia tej osi z płaszczyzną.

$$M_x = P_z y_0 - P_y z_0$$

$$M_y = P_x z_0 - P_z x_0$$

$$M_z = P_y x_0 - P_x y_0$$



Szczególne przypadki

(1) Siła w płaszczyźnie np. xy . Wówczas $z_0=0$ i $P_z=0$. Więc $M_x=0$, $M_y=0$, stąd:

$$M_o(\bar{P}) = M_z = P_y x_0 - P_x y_0$$

(2) Prosta działania siły przechodzi przez bieżun O . Wówczas $\bar{\rho}=0$ i $\bar{M}_o=0$.

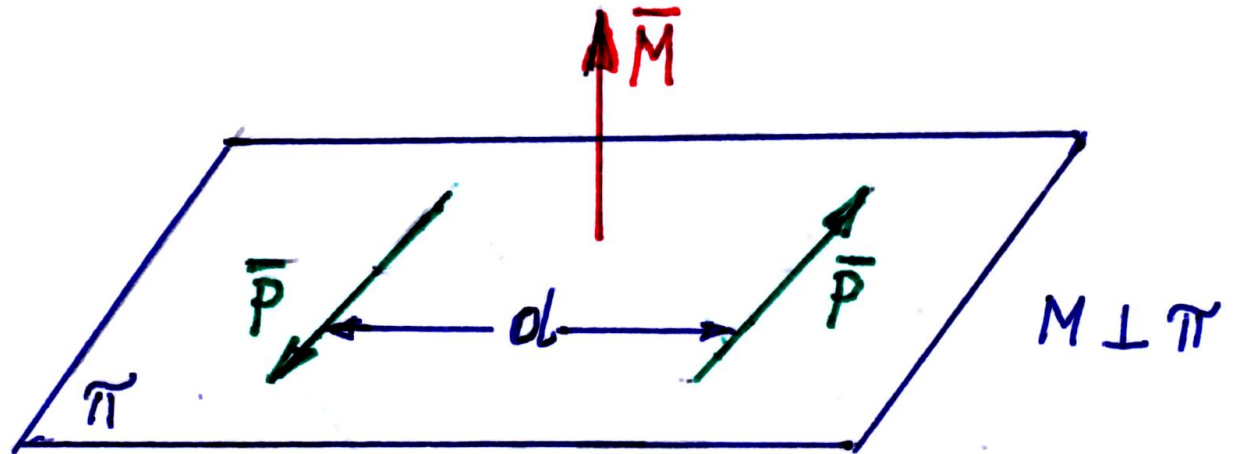
(3) Jeżeli siła równoległa do osi np. z , to $P_y=P_x=0$ i $M_z=0$.

PARA SIŁ

Układ 2 sił równoległych nie leżących na jednej prostej, o równych modułach i przeciwnych zwrotach.

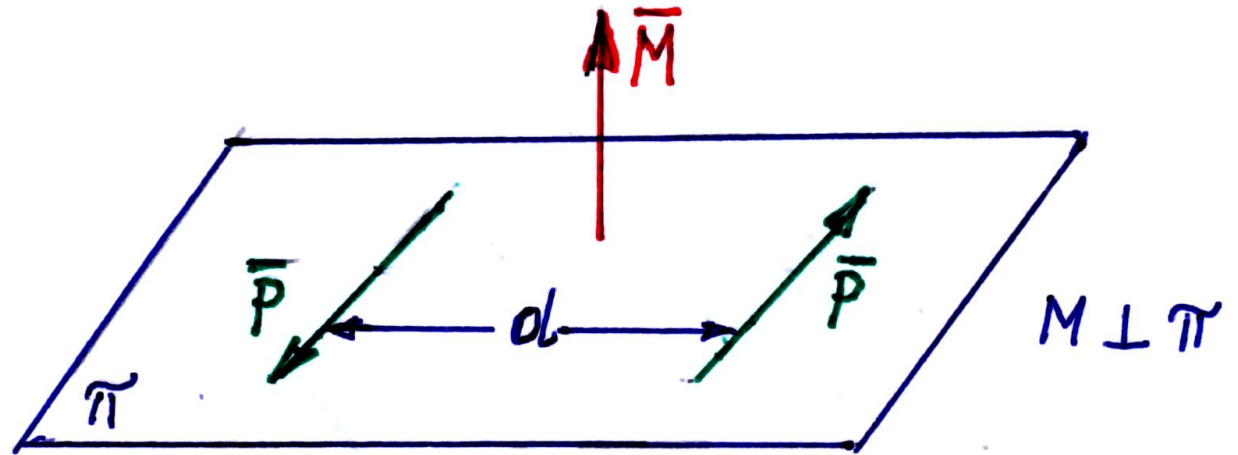
d – ramię pary

Moment pary: $M = P \cdot d$



Zwrot wektora momentu pary jest taki, by patrząc od strony strzałki wektora widzieć obrót pary przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Para sił, pojedyncza siła i moment siły są to elementarne układy statyki, tzn. nie da się ich przedstawić w prostszej postaci.



Twierdzenia o parach sił

Działanie pary sił na ciało sztywne nie zmieni się, jeżeli:

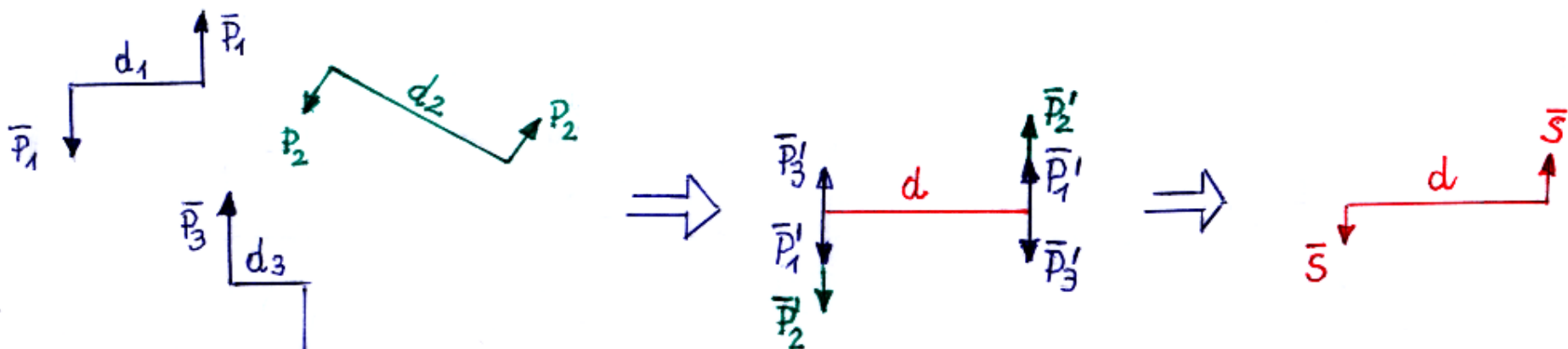
- Parę przesuniemy w dowolne położenie w płaszczyźnie jej działania;
- Zmienimy siły pary i ramię pary tak, by wektor momentu pozostał niezmienny;
- Przesuniemy parę do płaszczyzny równoległej do płaszczyzny jej działania.

Składanie par sił leżących w jednej płaszczyźnie

Na podstawie własności (a) i (b) można:

Obrać dowolne ramię d i zastąpić każdą parę parą o ramieniu d dobierając odpowiednią siłę P_i' tak, aby

$$P_i \cdot d_i = P_i' \cdot d = M_i$$



$$S = \sum_{i=1}^n P_i'$$

Wartość momentu pary sił \vec{S} :

$$M = d \cdot S = d \cdot \sum_{i=1}^n P_i' = \sum_{i=1}^n (d \cdot P_i') = \sum_{i=1}^n M_i$$

PŁASKI DOWOLNY UKŁAD SIŁ

Def.: Wszystkie siły leżą w jednej płaszczyźnie.

Redukcja układu sił = sprowadzenie tego układu do elementarnych układów sił, np.

- dwójki zerowej**
- jednej siły (przechodzącej przez bieżun redukcji)**
- pary sił**
- jednej siły i pary sił (tzn. siły przesuniętej względem bieżuna redukcji)**

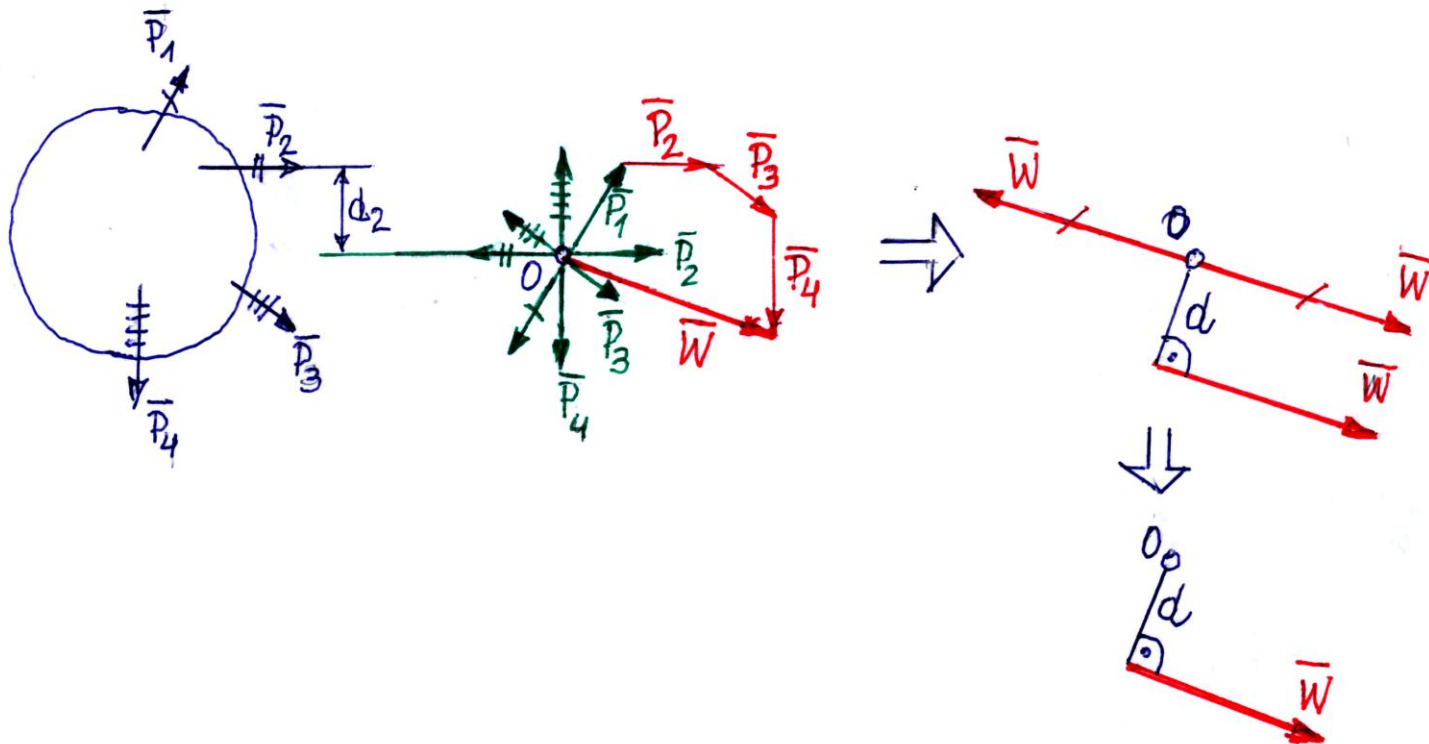
PLASKI DOWOLNY UKŁAD SIŁ

W dowolnym punkcie O płaszczyzny (tzw. biegun redukcji) przykładamy odpowiednie dwójki zerowe. Otrzymujemy:

- układ środkowy, który zastępujemy wypadkową $\bar{W} = \sum \bar{P}_i$

- układ par sił, który zastępujemy jedną parą o momencie $M = \sum P_i d_i$

Sily pary przyjmujemy równe W , stąd ramię pary $d = M / W = \frac{\sum P_i d_i}{W}$



Wyniki redukcji w formie skalarnej:

Jeżeli układ w płaszczyźnie xy i $\bar{P}_i(P_{ix}, P_{iy})$ to

$$W_x = \sum P_{ix}$$

$$W_y = \sum P_{iy}$$

$$M = \sum (P_{iy} x_i - P_{ix} y_i)$$

Przypadki szczególne:



$$(1) \quad \bar{W} = 0, \quad \bar{M} \neq 0, \quad \text{czyli} \quad \sum P_{ix} = 0, \quad \sum P_{iy} = 0, \quad \sum (P_{iy}x_i - P_{ix}y_i) \neq 0$$

Układ redukuje się do pary sił o momencie M .

$$(2) \quad \bar{W} \neq 0, \quad \bar{M} = 0, \quad \text{czyli} \quad \sum P_{ix} \neq 0, \quad \sum P_{iy} \neq 0, \quad \sum (P_{iy}x_i - P_{ix}y_i) = 0,$$

Układ redukuje się do wypadkowej zaczepionej w biegunie redukcji.
Jest to środkowy układ sił.

$$(3) \quad \bar{W} = 0, \quad \bar{M} = 0, \quad \text{czyli} \quad \sum P_{ix} = 0, \quad \sum P_{iy} = 0, \quad \sum (P_{iy}x_i - P_{ix}y_i) = 0,$$

Są to warunki konieczne i wystarczające równowagi płaskiego dowolnego układu sił.

PLASKI RÓWNOLEGLY UKŁAD SIŁ

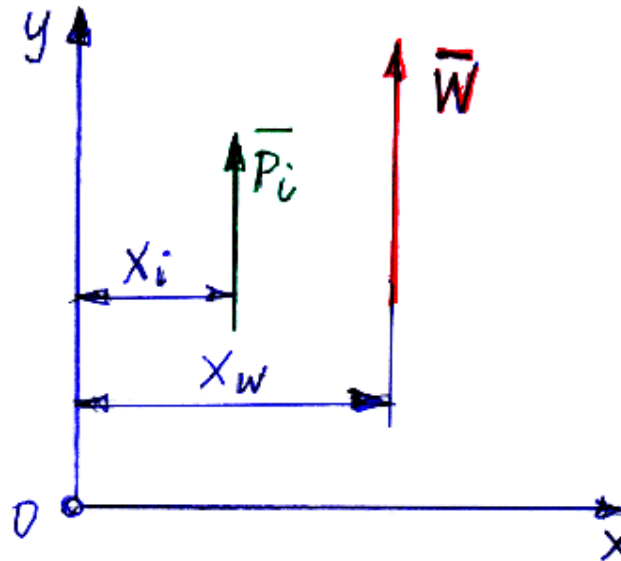
Def.: Wszystkie siły leżą w jednej płaszczyźnie i są do siebie równoległe. Jest to szczególny przypadek płaskiego układu sił.

Np. wszystkie siły równoległe do osi y . Wtedy $P_{ix}=0$ i $P_{iy}=P_i$.

Jeżeli bieżun w początku układu współrzędnych, to warunki równowagi:

$$W = \sum P_i = 0$$

$$M_o = \sum P_i x_i = 0$$



Wypadkowa \bar{W} jest równoległa do osi y , jej zwrot jest określony przez znak sumy $\sum P_i$, a odległość od bieżuna redukcji wynosi

$$x_w = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}$$

PRZESTRZENNY DOWOLNY UKŁAD SIŁ

Przestrzenny dowolny układ sił można zawsze zastąpić jedną siłą i parą sił.

Do bryły przyłożony jest przestrzenny układ n sił $\bar{P}_i(P_x, P_y, P_z)$.

Redukcja:

1. W biegunie redukcji O przykładamy n dwójek zerowych o siłach równych siłom \bar{P}_i .

Otrzymujemy:

(a) przestrzenny pęk n sił \bar{P}_i zaczepionych w biegunie redukcji O .

(b) przestrzenny układ n par sił (każda para w innej płaszczyźnie). Para i składa się z siły \bar{P}_i działającej na bryłę i odpowiedniej siły \bar{P}_i z dwójki zerowej zaczepionej w punkcie O .

2. Siły **(1)a** dodajemy geometrycznie otrzymując wypadkową:

$$\bar{W} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$$

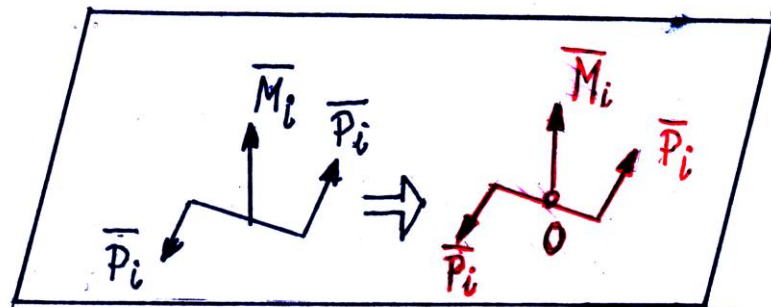
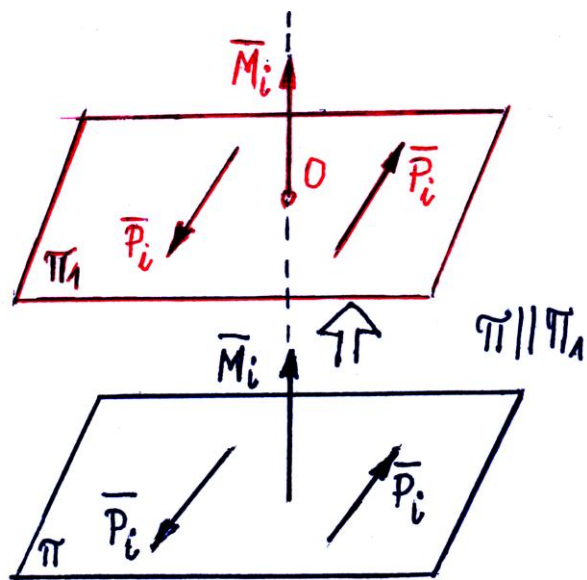
$$\bar{W} = (W_x, W_y, W_z): \quad W_x = \sum_{i=1}^n P_{ix}, \quad W_y = \sum_{i=1}^n P_{iy}, \quad W_z = \sum_{i=1}^n P_{iz}$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}$$

3. Każdą parę sil \vec{P}_i z **1(b)** zastępujemy momentem \vec{M}_i prostopadłym do płaszczyzny pary.

Ponieważ każdą parę można

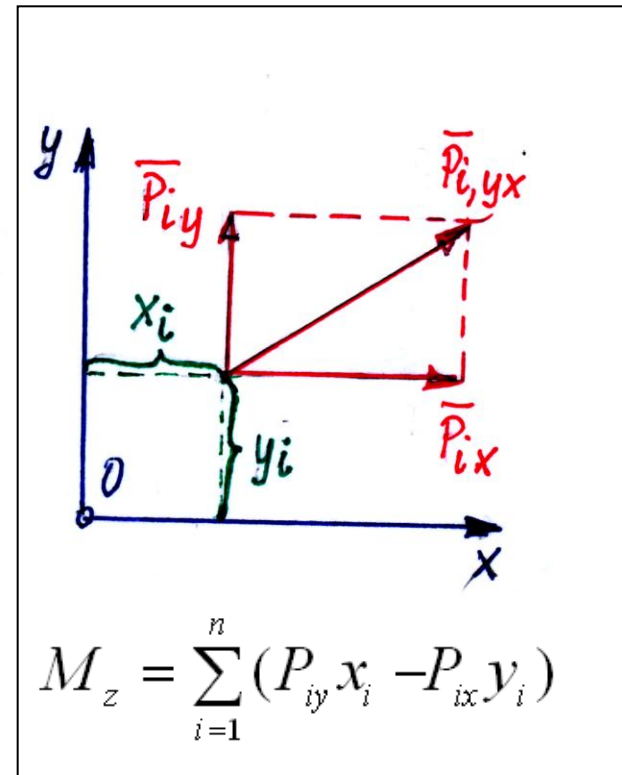
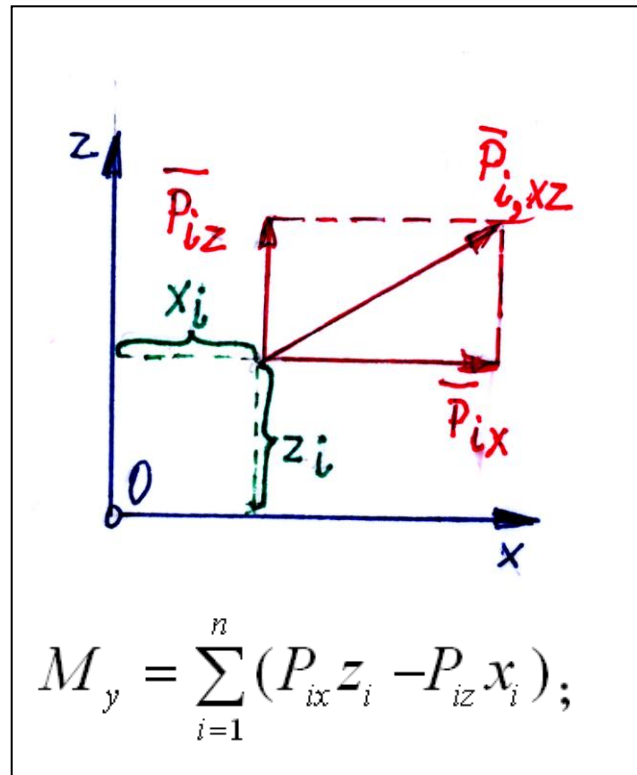
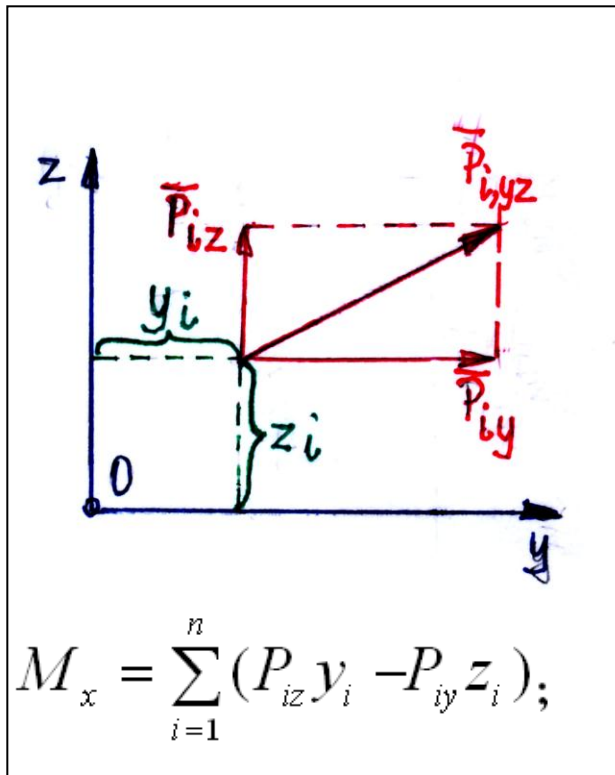
- przesunąć w dowolne położenie w jej płaszczyźnie (= równoległe przesuwanie wektora \vec{M}_i)
- przesunąć do płaszczyzny równoległej (= przesuwanie wektora \vec{M}_i wzdłuż prostej działania)



wektory \vec{M}_i zaczepiamy w biegunie redukcji i dodajemy geometrycznie otrzymując moment

wypadkowy $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$

$$\bar{M} = (M_x, M_y, M_z): \quad M_x = \sum_{i=1}^n M_{ix}, \quad M_y = \sum_{i=1}^n M_{iy}, \quad M_z = \sum_{i=1}^n M_{iz}$$



Wartość momentu wypadkowego

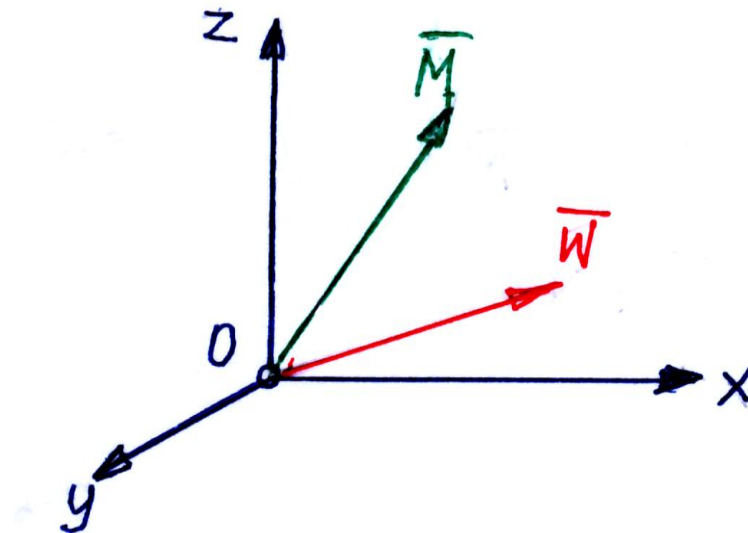
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

Warunki równowagi dowolnego przestrzennego układu sił

Na to aby dowolny przestrzenny układ sił w równowadze potrzeba i wystarcza aby były spełnione 2 równania wektorowe

$$\overline{W} = \sum_{i=1}^n \overline{P}_i = \mathbf{0} \quad \text{(I)}$$

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^n \overline{M}_i = \mathbf{0} \quad \text{(II)}$$



lub 6 równań skalarnych

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n (P_{iz} y_i - P_{iy} z_i) = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^n (P_{ix} z_i - P_{iz} x_i) = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n (P_{iy} x_i - P_{ix} y_i) = 0 \quad (6)$$

Równania (1) do (3) to skalarna forma równania wektorowego (I)

Równania (4) do (6) to skalarna forma równania wektorowego (II)

TARCIE

Całokształt zjawisk między stykającymi się ciałami stałymi spowodowanych działaniem siły normalnej (dociskającej) i stycznej (przemieszczającej ciała względem siebie).

Udział: powierzchniowe i podpowierzchniowe warstwy ciał, środowisko.

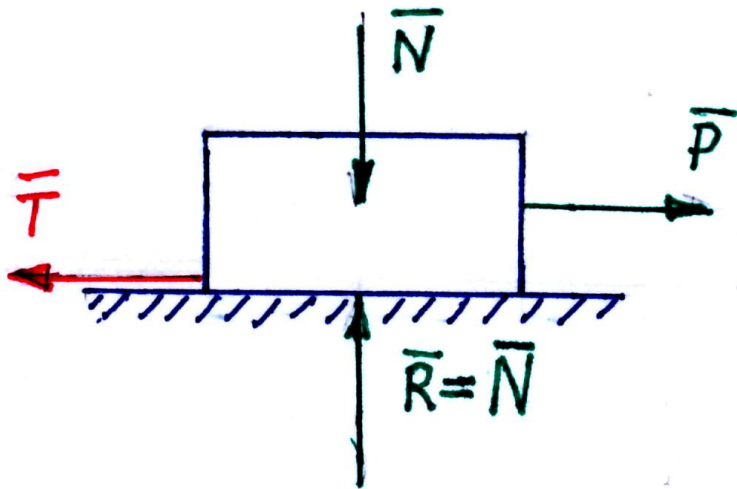
Podział:

- ze względu na środowisko: tarcie suche, półsuche, półpłynne, płynne itp.
- ze względu na charakter ruchu: tarcie ślizgowe i toczne,
- tarcie statyczne (spoczynkowe) i kinetyczne (ruchowe)

Skutki:

- opór względnego przemieszczania się ciał (pożyteczny – hamowanie, uzyskanie przyczepności; niekorzystny – utrata energii),
- zużycie.

Tarcie statyczne



T – siła tarcia statycznego przeciwstawiająca się wzajemnemu przesunięciu ciał

$$T = \mu_{st} \cdot N$$

Prawo tarcia statycznego:

$$P_{gr} = \mu_{st} \cdot N$$

P_{gr} – największa wartość siły przesuwającej P , która przy danym nacisku nie spowoduje przesunięcia ciała

μ_{st} – współczynnik tarcia statycznego (zależny od rodzaju materiałów, stanu ich powierzchni, środowiska)

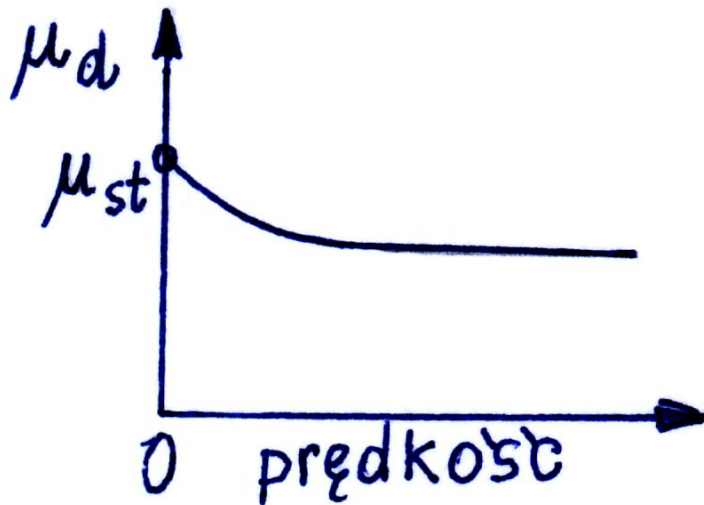
Tarcie kinetyczne (rozwinęte)

Przy ruchu siła tarcia ma zwrot przeciwny do zwrotu prędkości.

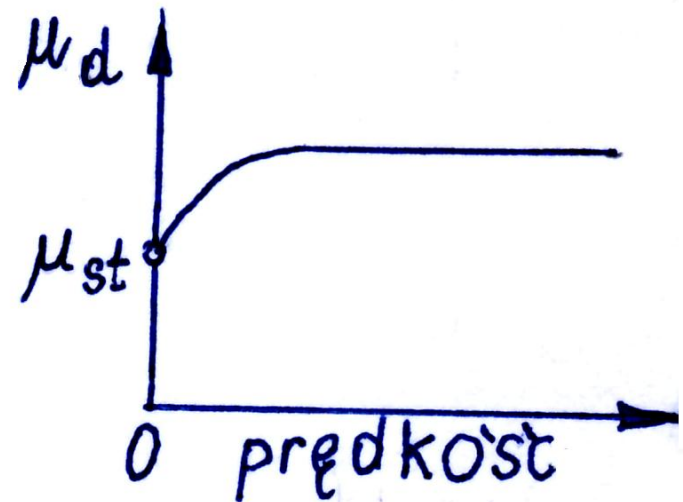
Wartość tarcia kinetycznego:

$$T = \mu_d \cdot N$$

μ_d – dynamiczny współczynnik tarcia (zależny od rodzaju materiałów, stanu ich powierzchni, środowiska, prędkości względnej)



stal po stali na sucho



tworzywa sztuczne

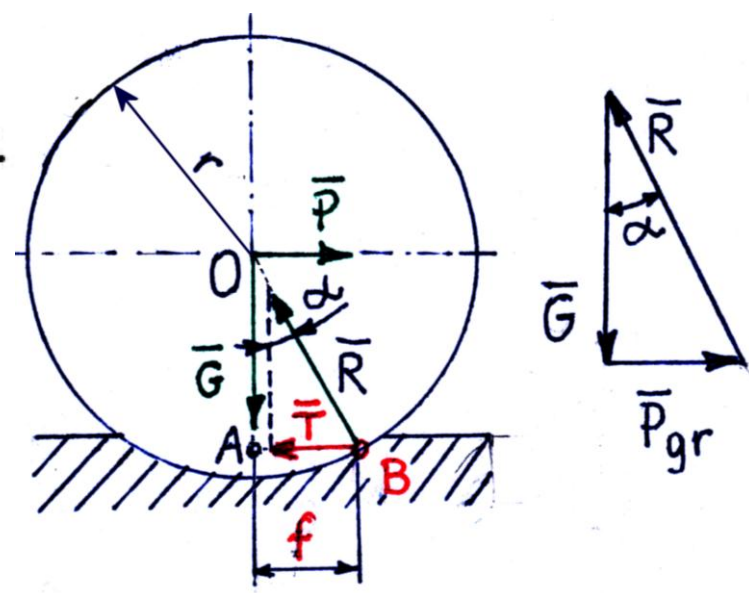
Tarcie toczenia

Przykład: toczenie walca po odkształcalnej powierzchni.

\bar{G} – ciężar

\bar{P} – siła czynna

\bar{R} – reakcja



Z twierdzenia o 3 silach: póki ciało jest w spoczynku (równowaga) siła \bar{R} musi przechodzić przez punkt O i być obrócona od pionu o pewien kąt α .

Z podobieństwa trójkąta sil i trójkąta OAB wynika prawo tarcia toczenia:

$$\frac{P_{gr}}{G} = \frac{f}{r}, \text{ stąd} \quad P_{gr} = \frac{f}{r} G$$

P_{gr} – największa wartość siły P, przy której nie ma jeszcze ruchu,

f - ramię oporu toczenia (w jednostkach długości).

Koło nie będzie się ślizgać, gdy $P_{gr} < \mu_{st} \cdot G$, czyli $f/r < \mu_{st}$.

Dla danych materiałów f/r jest znacznie mniejsze, niż współczynnik tarcia ślizgowego μ_{st} .