KINEMATYKA:

Badanie ruchu ciał niezależnie od przyczyn, które go powodują.

Przemieszczenia punktów ciał będących w ruchu określa się względem pewnego układu odniesienia przyjętego za nieruchomy biorąc pod uwagę czas, w którym nastąpiły.

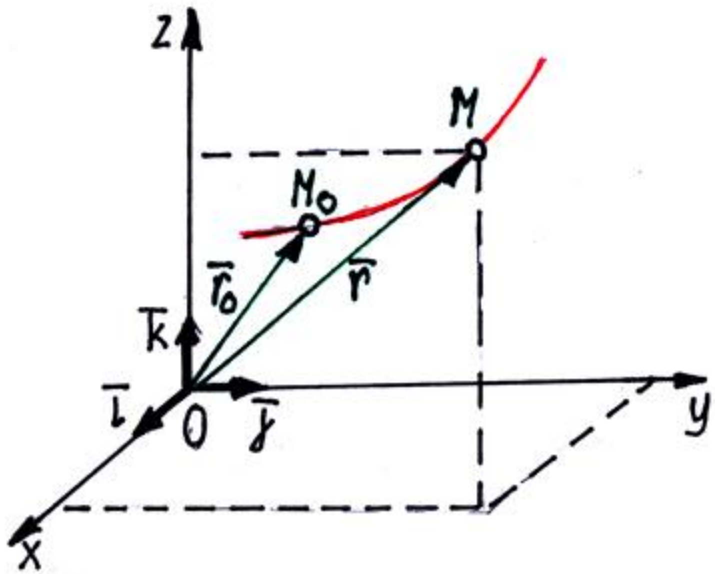
KINEMATYKA PUNKTU MATERIALNEGO

Sposoby opisu ruchu punktu:

1. Przy pomocy wektora-promienia wodzącego
2. Przy pomocy równań skończonych
3. Przy pomocy współrzędnej naturalnej (drogowej)

1. Opis ruchu punktu przy pomocy wektora-promienia wodzącego

Tor (trajektoria) punktu – linia ciągła będąca miejscem geometrycznym kolejnych położeń punktu w przestrzeni.



$\bar{r}$ – wektor-promień wodzący

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$$

Wektorowe równanie ruchu:

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$

$$\bar{r} = \bar{i} \cdot x(t) + \bar{j}\ y(t) + \bar{k} \cdot z(t)$$

2. Opis ruchu punktu przy pomocy równań skończonych

Równania parametryczne toru:

$x = f_1(t)$

$y = f_2(t)$

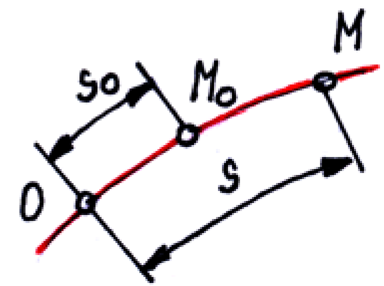
$z = f_3(t)$

Równanie toru w postaci jawnej f (x,y,z) = 0 otrzymuje się przez **wyrugowanie czasu**.

3. Opis ruchu punktu przy pomocy współrzędnej naturalnej (drogowej)

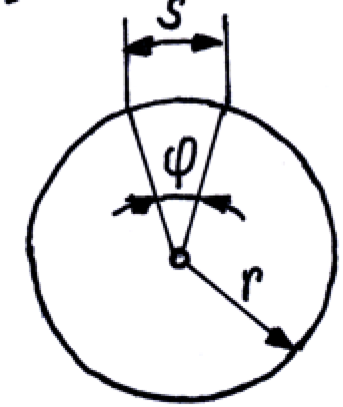
Współrzędna drogowa: s = łuk OM

dla t=0 $s=s_0$



Równanie ruchu: $s = f(t)$

Droga kątowa (ruch po okręgu o promieniu r): $\varphi = \dfrac{s}{r}$

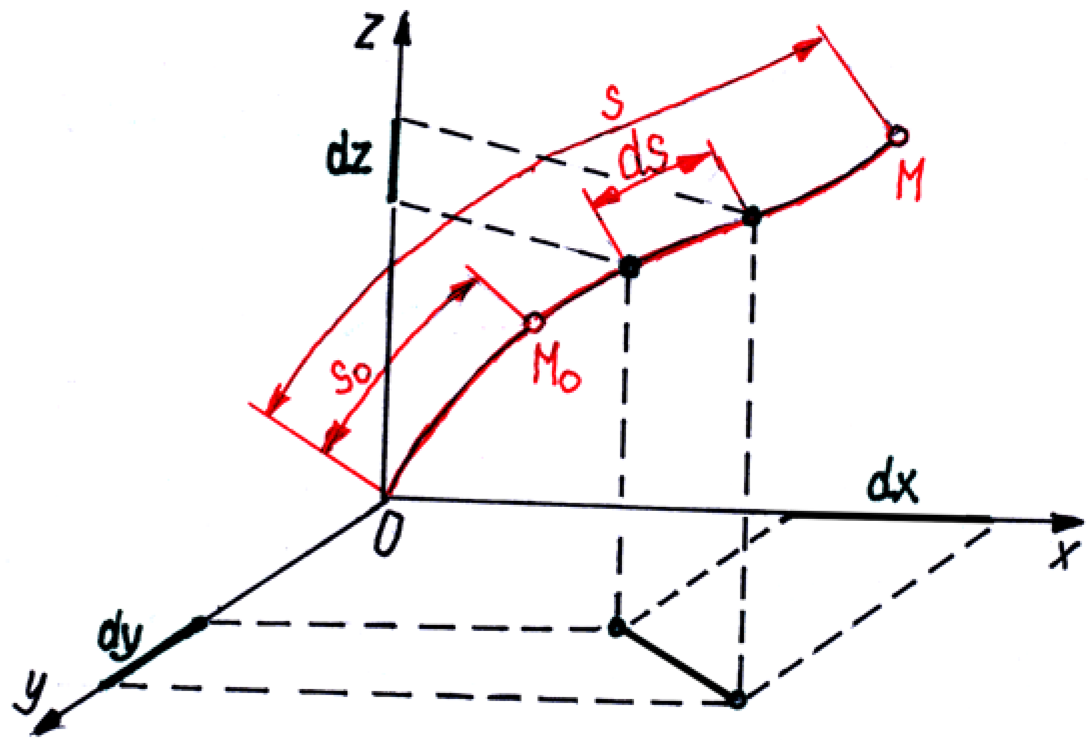


φ [radian]; s [jednostka długości] – droga liniowa

Równanie ruchu: $\varphi(t) = \dfrac{s(t)}{r}$

$$ds = \pm\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

$$ds = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt$$



PRĘDKOŚĆ PUNKTU

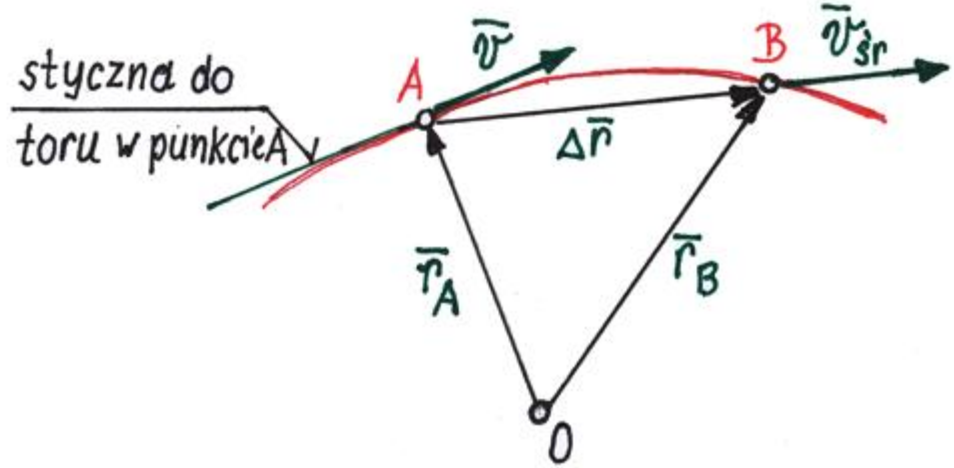
1. W wektorowym opisie ruchu

$\overline{r_B} = \overline{r_A} + \Delta\overline{r}$

Δt – czas ruchu między położeniem A i B

Prędkość średnia między położeniem A i B:

$$\overline{v_{śr}} = \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}$$



Definicja prędkości (chwilowej):

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \frac{d\overline{r}}{dt}$$

Jeżeli $\Delta t \to 0$ to punkt B $\to$ punkt A.

Stąd: graniczny kierunek $\Delta\overline{r}$ to styczna do toru w punkcie A.

Wniosek:

Wektor prędkości $\overline{v}$ leży na stycznej do toru i ma zwrot zgodny kierunkiem ruchu punktu

2. W opisie ruchu równaniami skończonymi

$$\bar{r} = \bar{i}\,\mathrm{x} + \bar{j}\,\mathrm{y} + \bar{k}\,\mathrm{z}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i}\frac{dx}{dt} + \bar{j}\frac{dy}{dt} + \bar{k}\frac{dz}{dt}$$

$$\bar{v} = \bar{i}v_x + \bar{j}v_y + \bar{k}v_z$$

Współrzędne $\bar{v}$:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Wartość $\bar{v}$:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

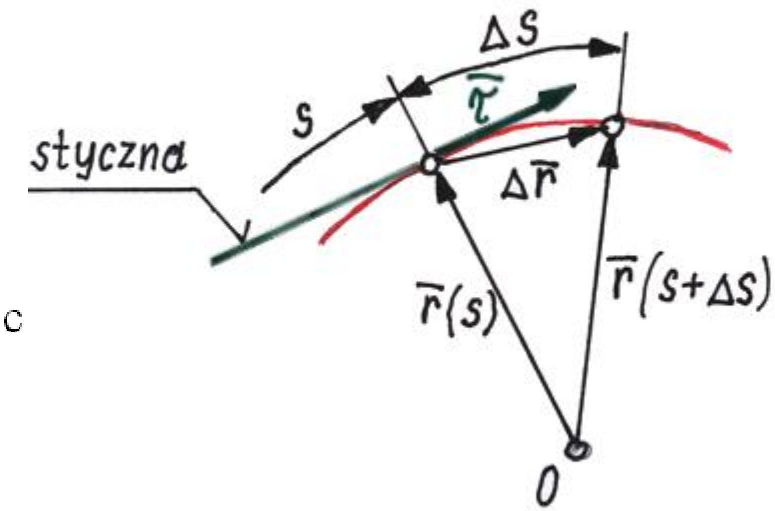
Cosinusy kierunkowe:

$\cos(\bar{v}, \mathrm{x}) = \mathrm{v_x/v}$, $\cos(\bar{v}, \mathrm{y}) = \mathrm{v_y/v}$, $\cos(\bar{v}, \mathrm{z}) = \mathrm{v_z/v}$

3. W opisie ruchu przy użyciu współrzędnej naturalnej (drogowej)

Każdej wartości współrzędnej drogowej s(t) poruszającego się punktu odpowiada określony wektor-promień $\bar{r}$, a więc można określić funkcję $\bar{r} = \bar{r}[s(t)]$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$



$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$$

Gdy $\Delta s \to 0$ kierunek $\Delta\bar{r} \to$ styczna w punkcie A, więc

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{B \to A} \frac{AB}{\cup AB} = 1$$

Wniosek:

Wektor $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ jest wersorem o kierunku stycznym do krzywej toru.

Ostatecznie:

$\bar{v} = \bar{\tau} \frac{ds}{dt}$ przy czym $|\bar{v}| = v = \frac{ds}{dt}$ bo $\bar{v} = \bar{\tau}\, v$

PRZYSPIESZENIE PUNKTU

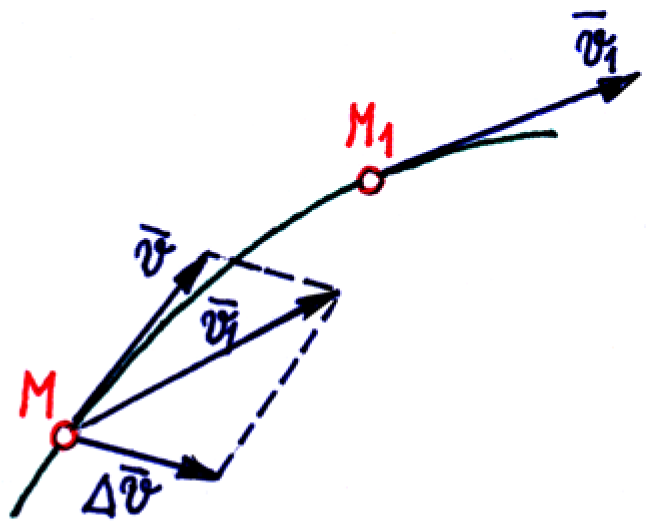
1. W wektorowym opisie ruchu

Przyspieszenie średnie między położeniem punktu M i M_1:

$$\overline{a_{śr}} = \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t}$$

Definicja przyspieszenia (chwilowego):

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2}$$



2. W opisie ruchu równaniami skończonymi

$$\bar{r} = \bar{i}\mathrm{x} + \bar{j}\mathrm{y} + \bar{k}\mathrm{z}$$

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \bar{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \bar{k}\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\bar{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z$$

Współrzędne wektora $\bar{a}$

$$a_{\mathrm{x}} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_{\mathrm{y}} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_{\mathrm{z}} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

lub $a_{\mathrm{x}} = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_{\mathrm{y}} = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_{\mathrm{x}} = \frac{dv_z}{dt}$

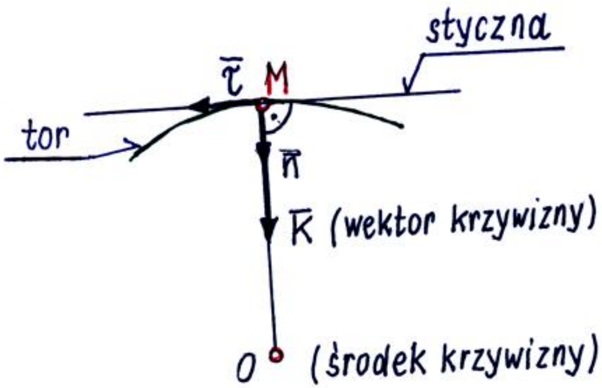
Wartość wektora $\bar{a}$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Kosinusy kierunkowe wektora $\bar{a}$

$\cos(\bar{a},\mathrm{x}) = a_{\mathrm{x}}/a \qquad \cos(\bar{a},\mathrm{y}) = a_{\mathrm{y}}/a \qquad \cos(\bar{a},\mathrm{z}) = a_{\mathrm{z}}/a$

3. W opisie ruchu sposobem naturalnym

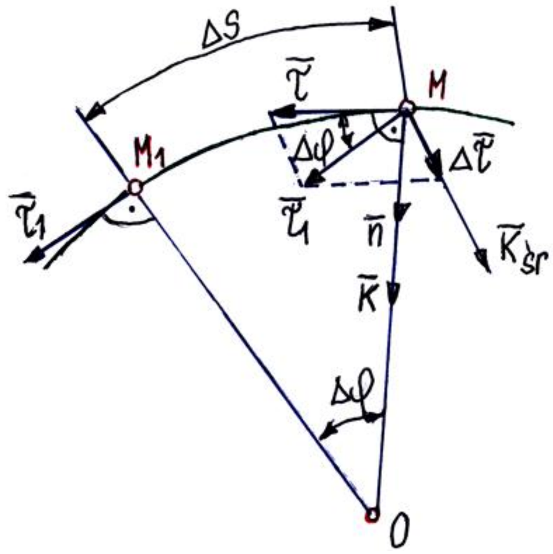


$\bar{\tau}$ - wersor styczny do toru

$\bar{n}$ - wersor normalny do toru

$\bar{K}$ - krzywizna toru

OM = ρ - promień krzywizny toru



Wektor krzywizny w punkcie M

$$\bar{K} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \qquad (1)$$

gdy $\Delta s \to 0$ to $\Delta \varphi \to 0$, więc $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\Delta \bar{\tau}\right| = \lim\limits_{\Delta \varphi \to 0} \left|\Delta \bar{\tau}\right| = \tau \cdot \Delta\varphi = 1 \cdot \Delta\varphi = \Delta\varphi$

$$\left|\bar{K}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \qquad (2) \qquad (\rho \text{ - promień krzywizny })$$

Gdy $\Delta s \to 0$, a więc $\Delta \varphi \to 0$ to kierunek $\Delta \bar{\tau} \to$ kierunek $\bar{n}$. Z (1) i (2) otrzymujemy

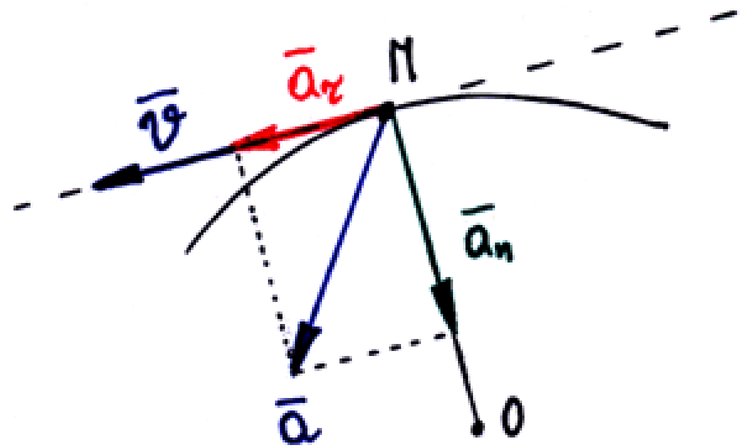
$$\bar{K} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{n}\frac{1}{\rho}$$

Z definicji $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt}$ oraz zależności $\bar{v} = \bar{\tau}\dfrac{ds}{dt}$ i $\bar{\tau} = \bar{\tau}[s(t)]$ wynika:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt} + \bar{\tau}\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \bar{\tau}\frac{d^2 s}{dt^2}$$

Uwzględniając $\bar{K} = \dfrac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{n}\dfrac{1}{\rho}$ (3) oraz $v = \dfrac{ds}{dt}$ otrzymujemy

$$\bar{a} = \bar{n}\frac{v^2}{\rho} + \bar{\tau}\frac{dv}{dt} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau$$



$\bar{a}_n$ - przyspieszenie normalne

$\bar{a}_\tau$ - przyspieszenie styczne

$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$; cos $(\bar{a}, \bar{n})$ $= a_n/a$; cos $(\bar{a}, \bar{\tau})$ $= a_\tau/a$

Mając zadany ruch p. M równaniami skończonymi możemy wyliczyć:

v^2, $\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2$, $a^2 = (a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2)$ a stąd promień krzywizny toru

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}}$$

SZCZEGÓLNE PRZYPADKI RUCHU PUNKTU

<u>Ruch jednostajny</u>

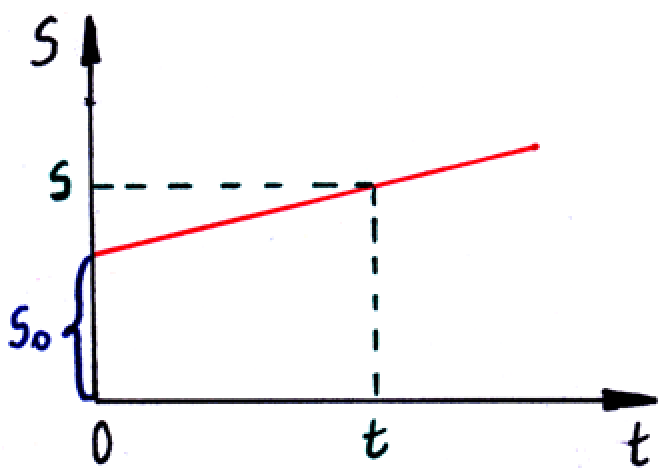
Df. Droga jest liniową funkcją czasu , tzn.

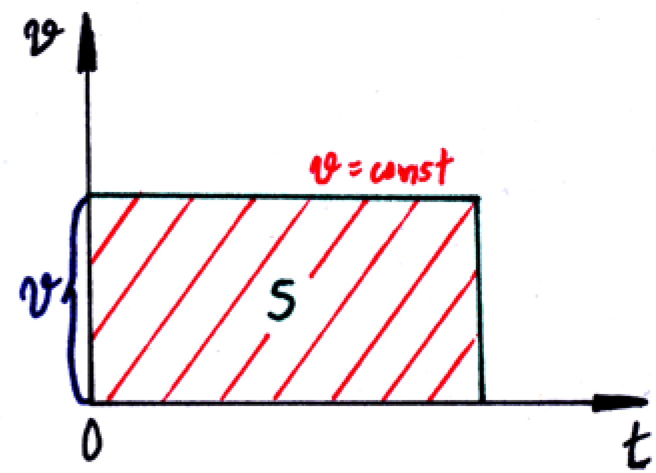
$\frac{ds}{dt} = \text{const}$, czyli v = const.

Wynika stąd

$\int_{s_o}^{s} ds = v\int_{0}^{t} dt$,   a stąd $s - s_o = vt$ lub

$$\mathbf{s = s_o + vt}$$





s – droga przebyta w czasie od 0 do t.

Ruch jednostajnie zmienny

Df. Prędkość jest liniową funkcją czasu , tzn.

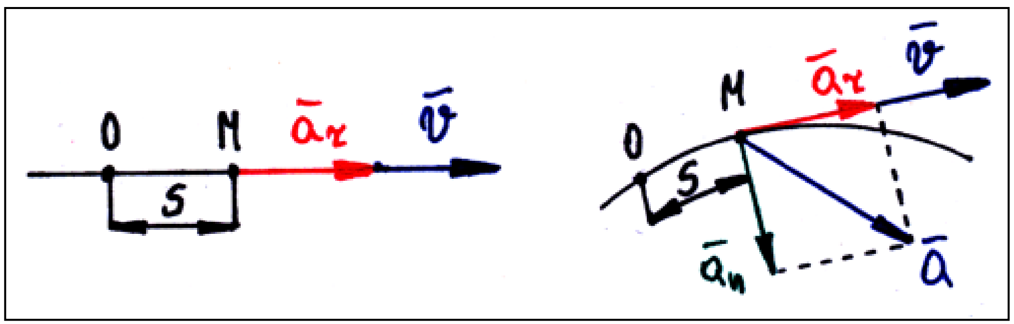
$$\frac{dv}{dt} = \text{const}, \qquad \text{czyli} \qquad a_\tau = \text{const}.$$

Dwa przypadki:

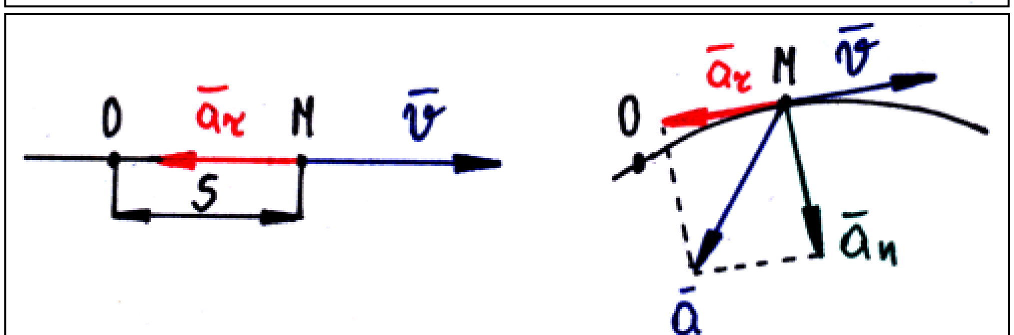
Ruch prostoliniowy: $\overline{a_n} = 0, \quad \overline{a_\tau} \neq 0$

Ruch krzywoliniowy: $\overline{a_n} \neq 0, \quad \overline{a_\tau} \neq 0$

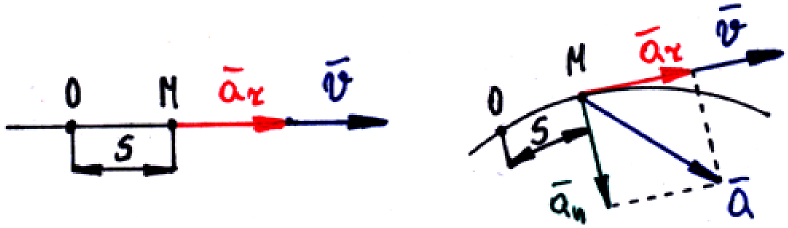
Ruch jest jednostajnie przyspieszony jeżeli $\overline{a_\tau}$ ma zwrot $\overline{v}$ i jednostajnie opóźniony gdy $\overline{a_\tau}$ ma zwrot przeciwny do $\overline{v}$.

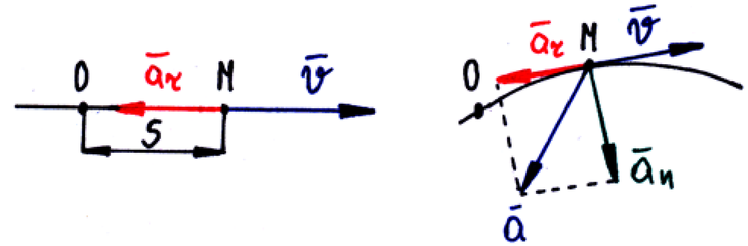


Ruch jednostajnie przyspieszony
$\overline{a_\tau} > 0$



Ruch jednostajnie opóźniony
$\overline{a_\tau} < 0$





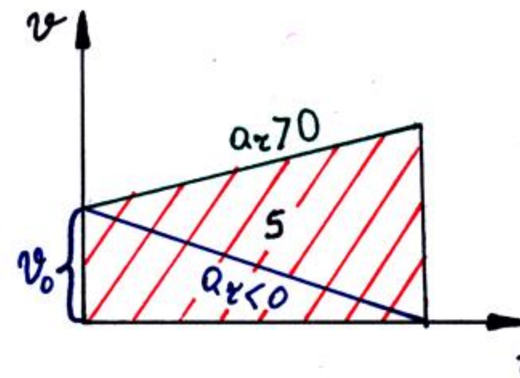
<u>Założenie:</u>

Dla $t_o=0$ $v=v_o$ $OM=s_o$ (warunki początkowe)

$$\frac{dv}{dt} = a_\tau = \text{const} \quad \rightarrow \quad dv = a_\tau \, dt$$

$$\int_{v_o}^{v} dv = \int_0^t a_\tau dt \quad \rightarrow \quad v - v_o = a_\tau \cdot t$$

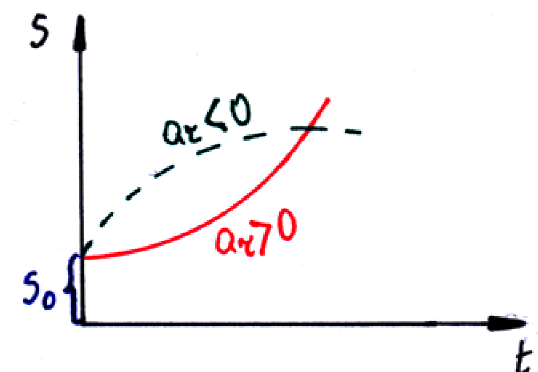
$$v = v_o + a_\tau \cdot t$$



$$\frac{ds}{dt} = v = v_o + a_\tau \cdot t \quad \rightarrow \quad ds = (v_o + a_\tau \cdot t)dt$$

$$\int_{s_o}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + a_\tau \cdot t)dt$$

$$s - s_o = v_o \cdot t + \frac{1}{2} a_\tau \cdot t^2$$



$$s = s_o + v_o \cdot t + a_\tau \cdot t^2/2$$

s – droga przebyta w czasie od 0 do t

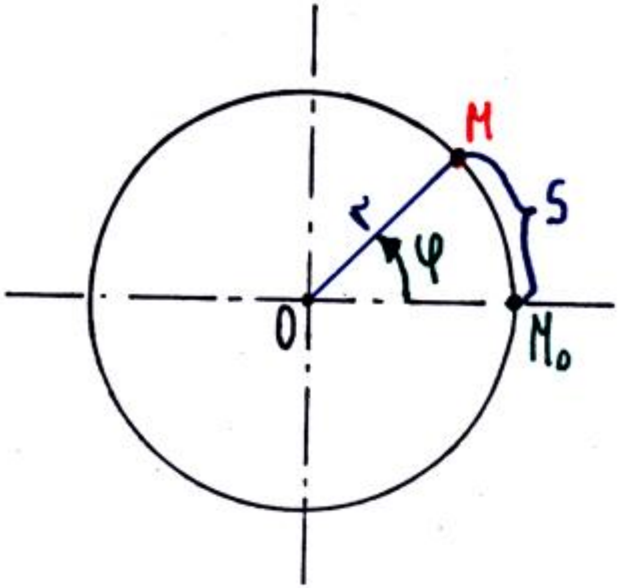
RUCH PO OKRĘGU KOŁA

$s = r \cdot \varphi$

s – droga liniowa; φ – droga kątowa

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega$$

ω - prędkość kątowa (s^{-1})



$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = r \cdot \ddot{\varphi} = r \cdot \varepsilon$$

ε - przyspieszenie kątowe (s^{-2})

Ponieważ $a_n = v^2/r$ to $a_n = r\omega^2$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{r^2\omega^4 + r^2\varepsilon^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Droga kątowa przebyta w ciągu 60 s

$$\varphi = \omega \cdot 60$$

Jeżeli punkt wykonuje n obrotów na minutę to

$$\varphi = 2\pi \cdot n$$

Stąd **$\omega = \pi n/30$**

Szczególne przypadki ruchu po okręgu

Ruch po okręgu może być:

1. Jednostajny

$\omega = \dot{\varphi} = const$

Z podzielenia stronami przez *r* równania $s = s_o + vt$:

$\boldsymbol{\varphi = \varphi_o + \omega t}$

2. Jednostajnie zmienny

$\dot{\omega} = \text{const}$,   czyli $\varepsilon = \text{const}$

Z podzielenia stronami przez *r* równań

$v = v_o + a_\tau \cdot t$

$s = s_o + v_o \cdot t + a_\tau \cdot t^2/2$

$\boldsymbol{\omega = \omega_o + \varepsilon \cdot t}$

$\boldsymbol{\varphi = \varphi_o + \omega_o \cdot t + \varepsilon \cdot t^2/2}$

ruch jednostajnie przyspieszony: $\varepsilon > 0$

ruch jednostajnie opóźniony: $\varepsilon < 0$

RUCH OKRESOWY

Df. Droga jest okresową funkcją czasu

Przypadek ważny ze względu na opis wszelkiego rodzaju drgań

Ruch powtarza się identycznie po pewnym przedziale czasu **T** zwanym **okresem ruchu**.

Jeżeli f(t) – jedna z funkcji występujących w równaniach ruchu np.

$\bar{r}(t)$, s(t), v(t), a(t) to:

$f(t \pm T) = f(t)\big|$ lub $f(t+nT)=f(t)$, gdzie $n=0, \pm1, \pm2, \ldots$

Wystarczający jest opis ruchu w jednym okresie.

Przykład: <u>Ruch harmoniczny</u>

Df. $x = A\sin(\omega t + \gamma)$

ω – prędkość kątowa
A – amplituda ruchu
γ – faza ruchu

Okres ruchu T=2π

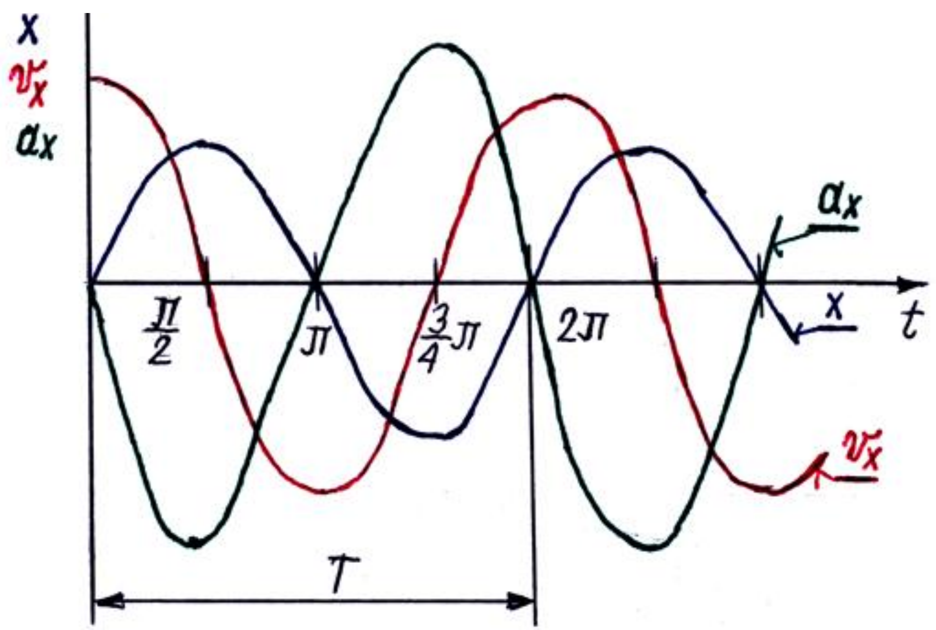
$$A\sin[\omega(t+T)+\gamma] = A\sin(\omega t+\gamma+2\pi),$$

stąd $\omega = 2\pi/T$

f=1/T - częstotliwość ruchu (liczba okresów w jednostce czasu)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos(\omega t+\gamma) = \omega A\sin(\omega t+\gamma+\pi/2)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A\sin(\omega t+\gamma) = \omega^2 A\sin(\omega t+\gamma+\pi)$$



KINEMATYKA BRYŁY

Liczba stopni swobody - liczba niezależnych współrzędnych potrzebnych do określenia położenia punktu lub bryły w przestrzeni

Punkt poruszający się swobodnie w przestrzeni: 3 stopnie swobody (x,y,z)

Punkt poruszający się po pewnej powierzchni $F(x,y,z)=0$: 2 stopnie swobody. (Współrzędne punktu w czasie ruchu muszą spełniać równanie tej powierzchni, a więc tylko 2 współrzędne są niezależne.)

Punkt poruszający się po pewnej linii (krzywej lub prostej): 1 stopień swobody. (Linia wynika z przecięcia 2 powierzchni.)

Ogólnie liczba stopni swobody układu punktów materialnych: $\mathbf{s = 3n - k}$

k - liczba niezależnych równań, n – liczba punktów układu.

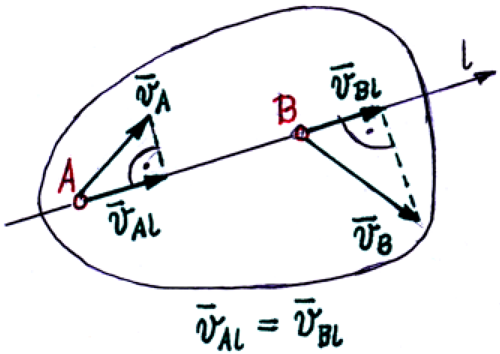
Położenie bryły w przestrzeni określają 3 punkty nie leżące na jednej prostej.
Do położenia 3 punktów potrzeba $3 \times 3 = 9$ współrzędnych. Z definicji bryły jako ciała sztywnego wynika, że odległości między tymi punktami muszą być stałe, tzn. w czasie ruchu muszą być spełnione 3 równania:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = a^2$$
$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = b^2$$
$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = c^2$$

Wniosek: **Bryła poruszająca się swobodnie w przestrzeni ma** $9 - 3 =$ **6 stopni swobody**.

Twierdzenie:

W bryle sztywnej podczas dowolnego jej ruchu rzuty wektorów prędkości dwóch dowolnych jej punktów na prostą łącząca te punkty są sobie równe.



$$\overline{v_{Al}} = \overline{v_{Bl}}$$

Dowód: gdyby prędkości $\overline{v_{Al}}$ i $\overline{v_{Bl}}$ były różne, to w czasie ruchu odległość między punktami A i B zmieniałaby się, co nie może mieć miejsca w ciele sztywnym.

RUCH POSTĘPOWY BRYŁY

Df. Prosta łącząca dwa dowolne punkty bryły przemieszcza się równolegle.

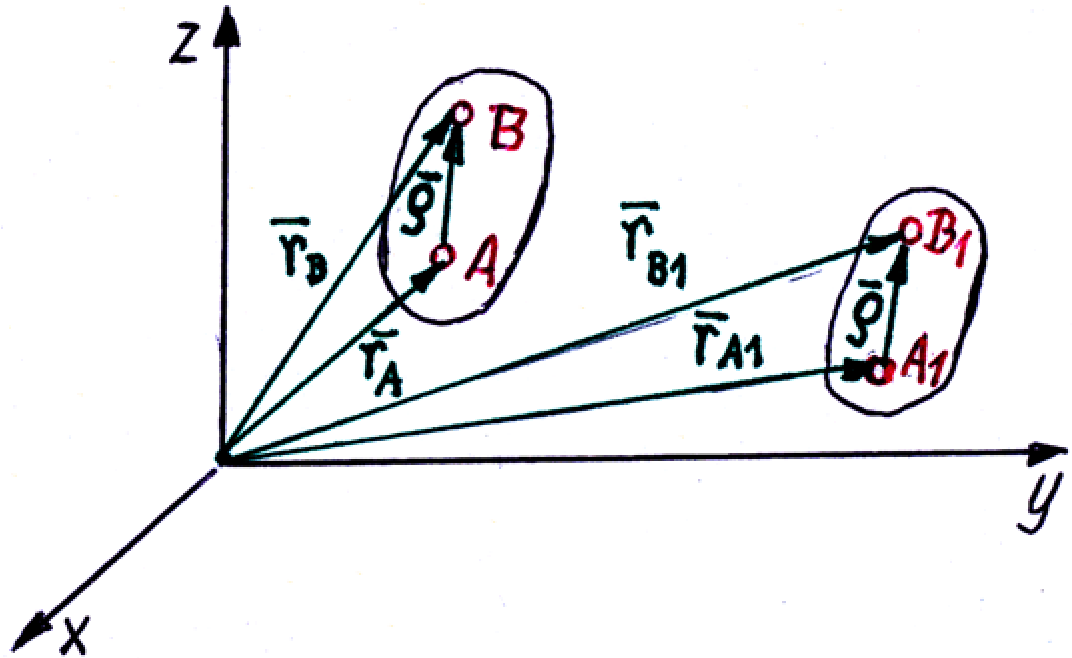
Ruch postępowy może być prostoliniowy (każdy punkt bryły porusza się po torze prostoliniowym) lub krzywoliniowy.

<u>Twierdzenie:</u> Jeżeli bryła porusza się ruchem postępowym, to wszystkie jej punkty poruszają się po torach przystających i w każdej chwili *t* mają te same wektory prędkości i przyspieszenia.

Dowód:

Z df. ruchu postępowego i ciała sztywnego:

$AB \,||\, A_1B_1,\ AB = A_1B_1 \rightarrow \overline{\rho} = \text{const}$



$$\overline{r_B}(t) = \overline{r_A}(t) + \overline{\rho}$$

$$\frac{d\overline{r_B}}{dt} = \frac{d\overline{r_A}}{dt} + \frac{d\overline{\rho}}{dt}$$

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = 0$$

$$\overline{v_A} = \overline{v_B}$$

$$\frac{d\overline{v_B}}{dt} = \frac{d\overline{v_A}}{dt}$$

$$\overline{a_B} = \overline{a_A}$$

Wniosek: ruch postępowy bryły jest w pełni określony jeżeli znamy ruch dowolnego jej punktu.

Bryła w ruchu postępowym może mieć 1, 2 lub 3 stopnie swobody (podobnie jak punkt).

RUCH OBROTOWY BRYŁY

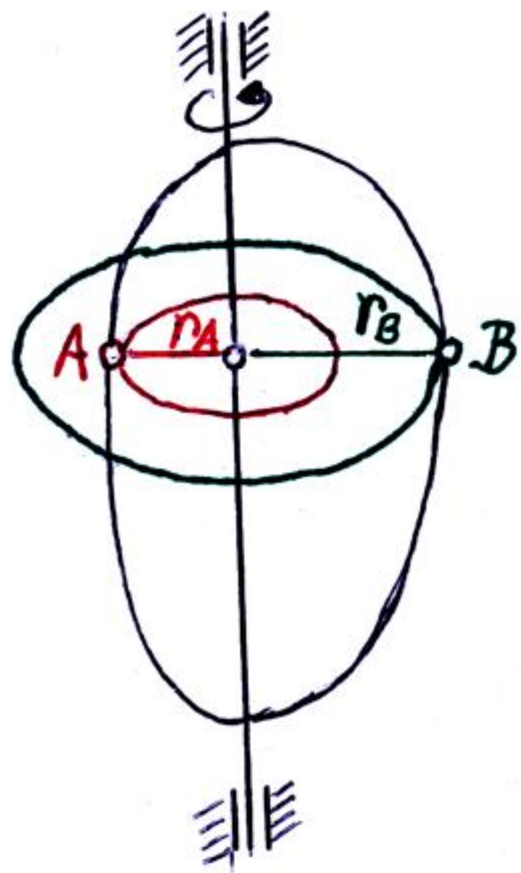
Df. <u>Wszystkie punkty bryły poruszają się po okręgach o środkach na jednej prostej zwanej osią obrotu</u>.

Prędkości kątowe i przyspieszenia kątowe wszystkich punktów bryły są w danej chwili jednakowe.

Prędkość liniowa punktu zależy od jego odległości od osi obrotu.

$v_K = \omega \cdot r_K$

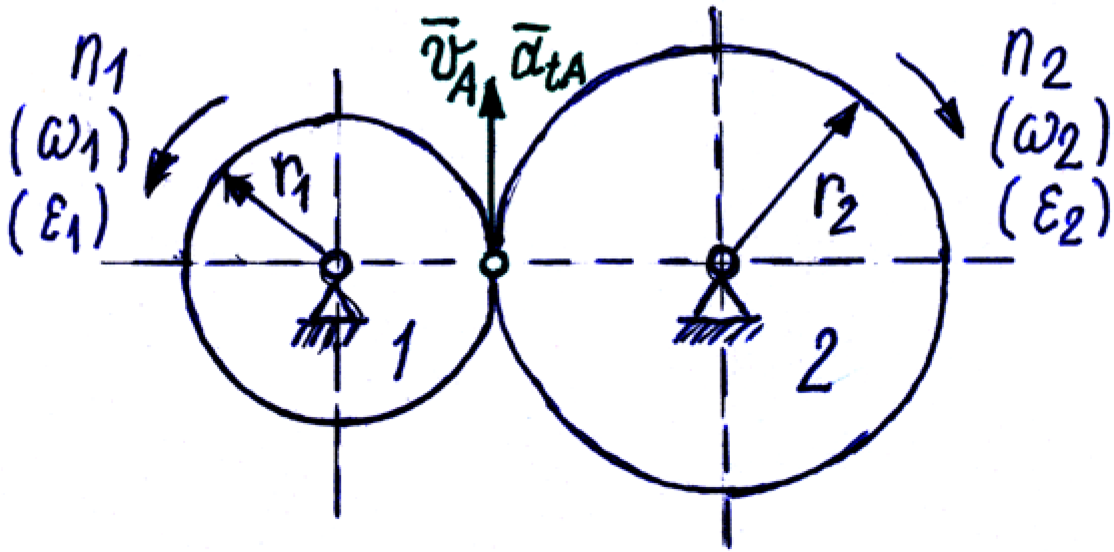
Punkty na osi obrotu są nieruchome.



Przekładnia zębata lub cierna

$v_A = \omega_1 \cdot r_1$
$v_A = \omega_2 \cdot r_2$

$a_{tA} = \varepsilon_1 \cdot r_1$
$a_{tA} = \varepsilon_2 \cdot r_2$



Przełożenie przekładni

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

r – promień koła ciernego (promień podziałowy koła zębatego)
z – liczba zębów koła zębatego
n – liczba obrotów na jednostkę czasu
ω – prędkość kątowa (s^{-1})
ε – przyspieszenie kątowe

Przekładnia pasowa

$v_A = v_B = v_p$
(indeks „p” dotyczy pasa)

$v_A = \omega_1 \cdot r_1$

$v_B = \omega_2 \cdot r_2$

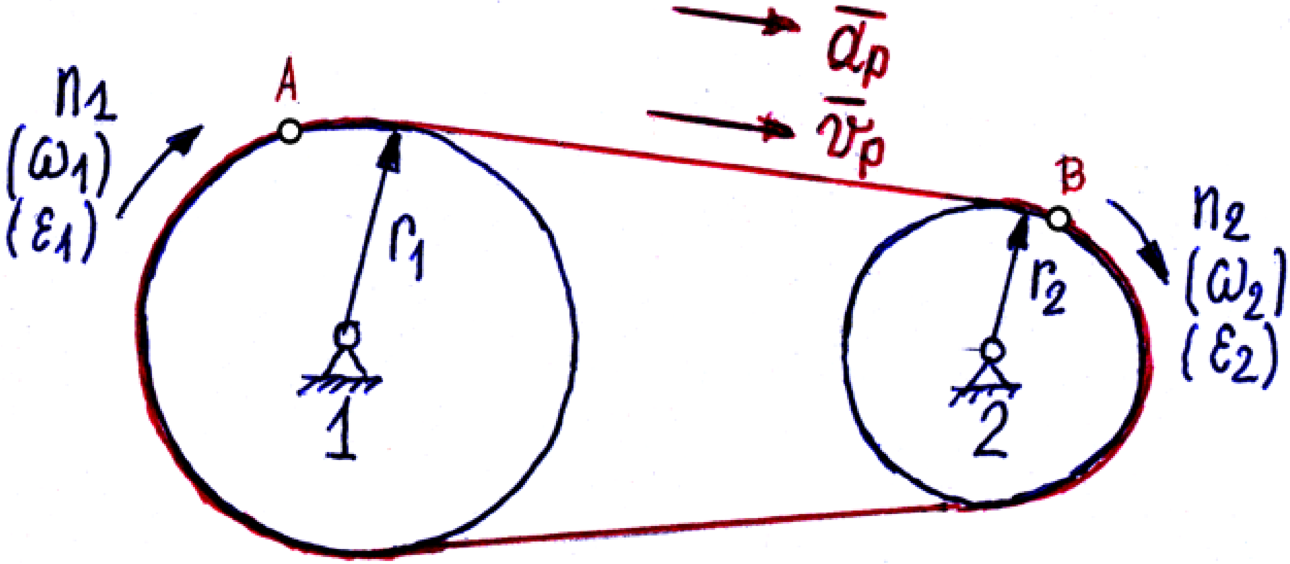
$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$

$a_{tA} = a_p = a_{tB}$

$a_{tA} = \varepsilon_1 \cdot r_1$

$a_{tB} = \varepsilon_2 \cdot r_2$

$\varepsilon_1 \cdot r_1 = \varepsilon_2 \cdot r_2$



Przełożenie przekładni

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$