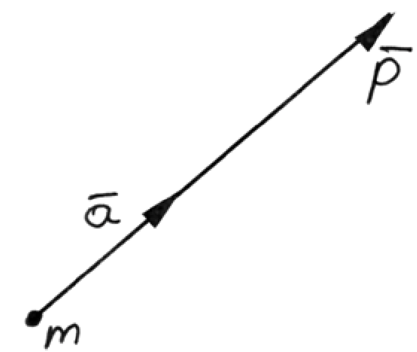
DYNAMIKA

Badanie ruchu ciał jako skutku działania sił.

Zasady dynamiki Newtona

I. Jeżeli na swobodny punkt materialny nie działają żadne siły lub układ sił działających pozostaje w równowadze, to punkt materialny porusza się ruchem jednostajnym lub pozostaje w spoczynku.

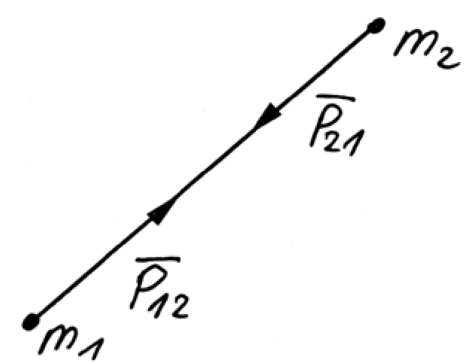
II. Jeżeli na swobodny punkt materialny działa siła, to nadaje mu ona przyspieszenie proporcjonalne do wartości tej siły, o tym samym kierunku i zwrocie.



$$\overline{P} = m\,\overline{a}$$

Współczynnik proporcjonalności $\boldsymbol{m}$ – masa punktu materialnego

III. Jeżeli punkt materialny o masie m_1 działa na punkt materialny o masie m_2 z pewną siła $\boldsymbol{P_{12}}$, to punkt o masie m_2 działa na punkt pierwszy z siłą $\boldsymbol{P_{21}}$ równą co do wartości, lecz przeciwnie zwróconą.



Zasada niezależności działania sił (zasada superpozycji)

Działanie na punkt materialny środkowego układu sił jest równoważne działanie siły wypadkowej tego układu.

⇓

Przyspieszenie wywołane geometryczną sumą sił jest równe geometrycznej sumie przyspieszeń wywołanych przez poszczególne siły.

$$m\bar{a}_1 = \bar{P}_1$$

....

$$m\bar{a}_n = \bar{P}_n$$

+______________

$$m(\bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_n) = \bar{P}_1 + \ldots + \bar{P}_n$$

lub

$$m\bar{a} = \bar{W}$$

gdzie: $\bar{a} = \sum a_i$; $\bar{W} = \sum \bar{P}_i$

Siła ciężkości nadaje swobodnemu punktowi materialnemu przyspieszenie $\boldsymbol{g}$**=9.81 m/s**^{2}

$$\boxed{\bar{G} = m\bar{g}}$$

Dynamika swobodnego punktu materialnego

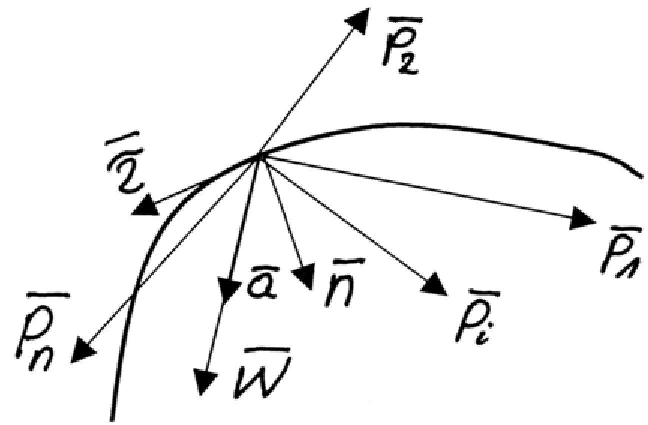
Dynamiczne równania ruchu punktu materialnego

1. we współrzędnych prostokątnych

$m\ddot{x} = P_{1x} + \ldots + P_{nx} = \sum P_{ix}$

$m\ddot{y} = P_{1y} + \ldots + P_{ny} = \sum P_{iy}$

$m\ddot{z} = P_{1z} + \ldots + P_{nz} = \sum P_{iz}$



2. we współrzędnych naturalnych

$m\,a\cos(\overline{a},\overline{\tau}) = \sum P_i \cos(\overline{P}_i,\overline{\tau})$
$m\,a\cos(\overline{a},\overline{n}) = \sum P_i \cos(\overline{P}_i,\overline{n})$

stąd:

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos\left(\overline{P}_i, \overline{\tau}\right)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = \sum_{i=1}^{n} P_i \cos\left(\overline{P}_i, \overline{n}\right)$$

Podstawowe zagadnienia dynamiki

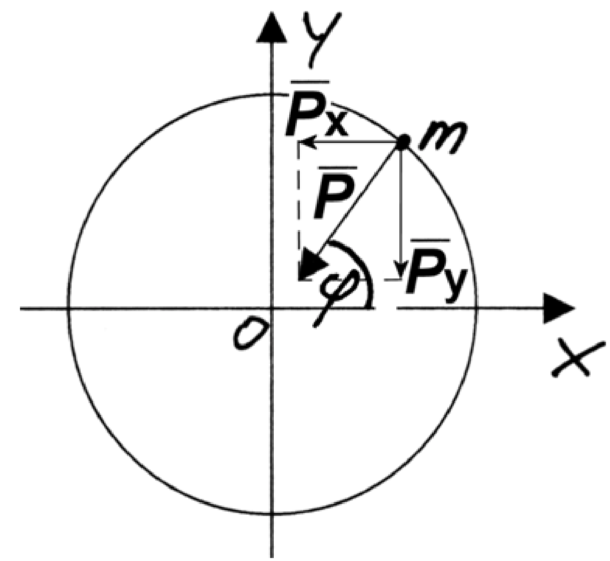
1. Dane: masa i równanie toru punktu materialnego.
   Wyznaczyć: wektor wypadkowej siły działającej na ten punkt.
2. Dane: masa i siły działające na punkt materialny oraz warunki początkowe.
   Wyznaczyć: równanie ruchu punktu.

Przykład 1

Mając dane równanie ruchu punktu ***M*** o masie ***m*** w postaci:

$\boldsymbol{x = r \cos\omega t, \; y = r \sin \omega t}$.

Znaleźć siłę wypadkową przyłożoną do tego punktu.



Równanie toru:

$x^2 + y^2 = r^2$

$\dot{x} = -r\omega \sin\omega t \;\Rightarrow\; \ddot{x} = -r\omega^2 \cos\omega t \;\Rightarrow\; P_x = m\ddot{x} = -mr\omega^2 \cos\omega t$

$\dot{y} = r\omega \cos\omega t \;\Rightarrow\; \ddot{y} = -r\omega^2 \sin\omega t \;\Rightarrow\; P_y = m\ddot{y} = -mr\omega^2 \sin\omega t$

$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = mr\omega^2$

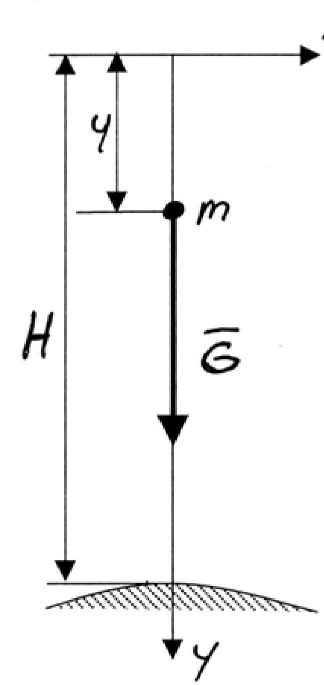
$\cos(\overline{P}, \overline{i}) = P_x/P = -\cos\omega t = -\cos\varphi$

$\cos(\overline{P}, \overline{j}) = P_y/P = -\sin\omega t = -\sin\varphi$

Siła $\overline{P}$ jest stale skierowana do początku układu współrzędnych (środka okręgu).

Przykład 2

Znaleźć równanie ruchu punktu swobodnego pod działaniem siły ciężkości, który spada z wysokości H jeżeli w chwili $\boldsymbol{t=0}$, $\boldsymbol{y=0}$, $\boldsymbol{v_y=0}$.



Równanie różniczkowe ruchu:

$m\ddot{y}=mg$, stąd $\ddot{y}=g$

Całkujemy dwukrotnie:

$\boldsymbol{v_y=\dot{y}=gt+C_1,}$
$\boldsymbol{y=gt^2/2+ C_1t+ C_2}$
Wyznaczamy stałe całkowania z warunków początkowych:
$\boldsymbol{v_y(t=0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0}$
$\boldsymbol{y(t=0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_2=0}$

stąd $\boldsymbol{v_y=gt}$**;** $\boldsymbol{y(t)=gt^2/2}$

Czas spadania z wysokości H: $t=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

Prędkość końcowa: $v=\sqrt{2gH}$

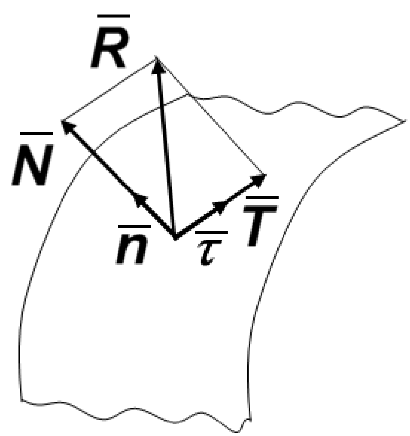
Dynamika nieswobodnego punktu materialnego

Df.: patrz wykład ze Statyki

Aksjomat: Nieswobodny punkt materialny można rozpatrywał jako punkt swobodny, jeżeli do sił czynnych dodamy reakcje więzów.

Więzy idealne: siły reakcji || do wektora $\overline{n}$ krzywej lub powierzchni. Wówczas krzywa lub powierzchnia jest idealnie gładka.

Więzy rzeczywiste: siły reakcji **nie są** || do wektora $\overline{n}$. Wówczas krzywa lub powierzchnia jest chropowata. Składowa reakcji na kierunek $\overline{\tau}$ - siła tarcia.

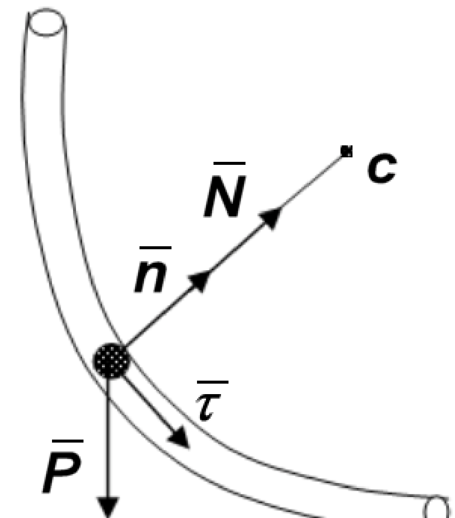


Przykład 3:

Dynamiczne równania ruchu po krzywej płaskiej idealne gładkiej, np. kulka w krzywoliniowej rurce.

Dane: P, m szukane: równanie toru punktu, reakcja N

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{N}$$



lub

$$ma_\tau = P_\tau$$
$$ma_n = P_n + N$$

czyli:

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = P_\tau \qquad ①$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = P_n + N \qquad ②$$

Całkując ① $\Rightarrow$ $v(t) = \frac{ds}{dt}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{s = s(t)}$.

Podstawiając $\boldsymbol{v(t)}$ do ② $\Rightarrow$ wartość reakcji N

Przykład 4:

Ciało o ciężarze $\overline{G}$ porusza się w dół po chropowatej równi pochyłej pochylonej do poziomu pod kątem α według równania $\boldsymbol{x=bgt^2}$, gdzie $\boldsymbol{g}$ – przyspieszenie ziemskie $\boldsymbol{b}$ – stała. Wyznaczyć wartość siły tarcia (T).

Równanie dynamiczne ruchu:

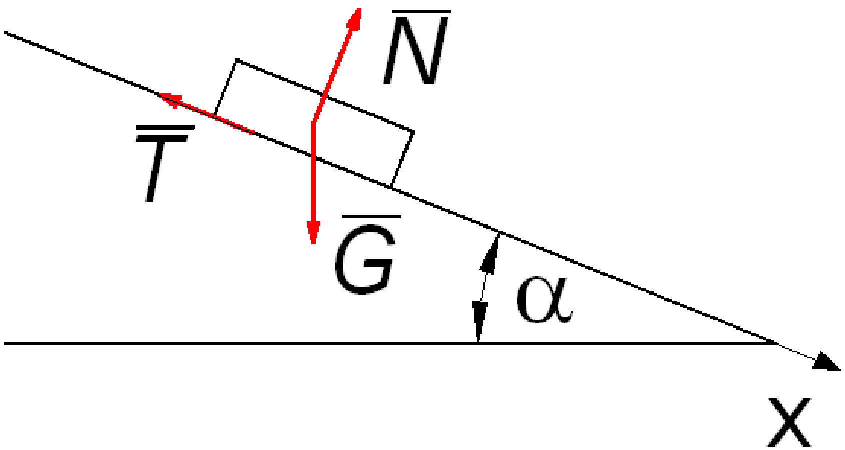
$$m\overline{a} = \overline{G} + \overline{N} + \overline{T}$$

wzdłuż osi x:

$$m\ddot{x} = G \sin\alpha - T$$

Ponieważ $\ddot{x} = 2bg$; $m = G/g$,

$$(G/g)2bg = G\sin\alpha - T \quad \Rightarrow \quad T = G(\sin\alpha - 2b)$$



DYNAMIKA UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

Df. Układ punktów materialnych (u.p.m.) – zbiór punktów, w których położenie każdego punktu zależy od położeń innych punktów.

Środek masy u.p.m. jest to punkt o współrzędnych

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad \overline{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Zasada ruchu środka masy u.p.m.

Dynamiczne równanie ruchu punktu ***i***:

$$m_i \bar{a}_i = \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \bar{P}_i + \bar{R}_i + \bar{S}_i$$

$\bar{P}$ – siła czynna; $\bar{R}$ – siła reakcji; $\bar{S}$ – siła wewnętrzna

Sumujemy stronami wszystkie równania:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{R}_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{S}_i \quad \text{ale} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left(\bar{r}_s \sum_{i=1}^{n} m_i\right) = M \frac{d^2 \bar{r}_s}{dt^2}$$

gdzie $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

$\sum \bar{S}_i = 0$ (III zasada dynamiki Newtona)

Oznaczając: $\sum \bar{P}_i = \bar{W}$; $\sum \bar{R}_i = \bar{W}_R$ dostajemy: $M \frac{d^2 \bar{r}_s}{dt^2} = \bar{W} + \bar{W}_R$ lub $M\bar{a}_s = \bar{W} + \bar{W}_R$

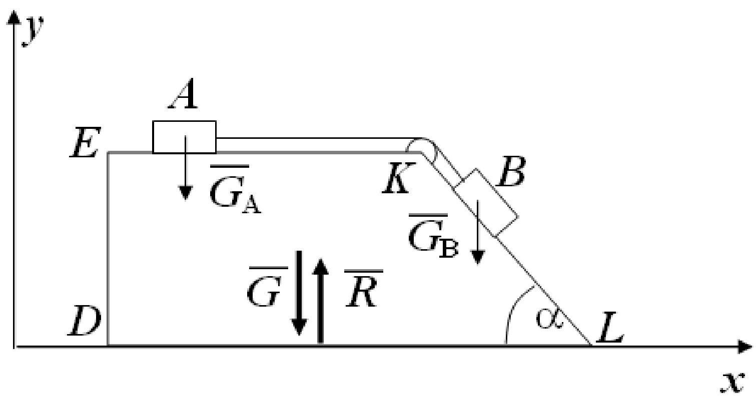
lub skalarnie: $M\ddot{x}_s = W_x + W_{Rx}$; $M\ddot{y}_s = W_y + W_{Ry}$; $M\ddot{z}_s = W_z + W_{Rz}$

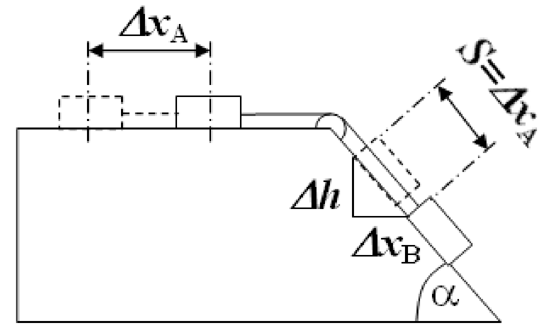
Środek masy porusza się jak swobodny punkt materialny o masie równej masie całego układu pod działaniem sumy sił czynnych i reakcji.

Jeżeli $\bar{W} + \bar{W}_R = 0$ **, to środek masy pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.**

Przykład 5

Po nachylonej gładkiej równi **KL** ściętego graniastosłupa **DEKL** opuszcza się ciało **B** wprawiając w ruch przy pomocy bezmasowej i nierozciągliwej linki ciało **A**. Znaleźć, o ile przesunie się graniastosłup po idealnie gładkiej poziomej płaszczyźnie (***Δx=?***), jeżeli ciało **B** obniży się o ***Δh***.





$$\overline{\mathbf{W}} = \overline{\mathbf{W}} + \overline{\mathbf{W}}_R = \overline{\mathbf{G}}_A + \overline{\mathbf{G}}_B + \overline{\mathbf{G}} + \overline{\mathbf{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}\ddot{x}_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_S = \mathbf{C}$$

Zakładamy: $t=0$ $\dot{x}_S=0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{C=0}$

Stąd $\mathbf{M}x_S$**=const**: tzn. x_S nie zależy od przemieszczenia poszczególnych mas układu i ma wartość stałą.

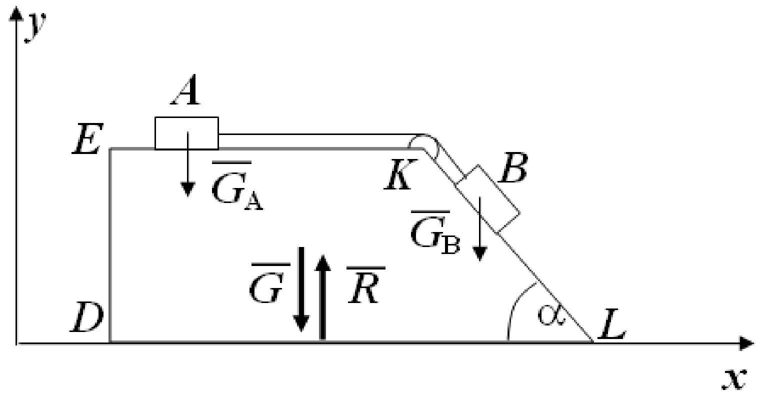
$$Mx_S = \sum_{i=1}^{3} m_i x_i$$

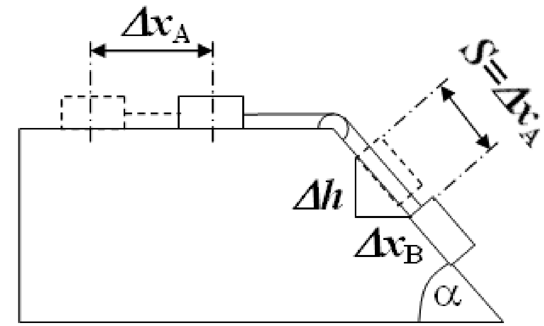
$t=t_1$: $$Mx_S = \sum_{i=1}^{3} m_i x_{1i}$$

t=t$_2$: $$Mx_S = \sum_{i=1}^{3} m_i x_{2i} \quad / \cdot (-1)$$

+

$$0 = \sum_{i=1}^{3} m_i \left(x_{2i} - x_{1i} \right)$$





$x_{2i} - x_{1i} = \Delta x_i$

$m_A \Delta x_A + m_B \Delta x_B + m \Delta x = 0$, Δx – przemieszczenie graniastosłupa

$$\Delta x = -\frac{1}{m}\left(m_A \Delta x_A + m_B \Delta x_B \right) = -\frac{1}{m}\left(m_A \frac{\Delta h}{\sin\alpha} + m_B \Delta h ctg\,\alpha \right)$$

kierunek Δx przeciwny do Δx_A i Δx_B!

SIŁA BEZWŁADNOŚCI - ZASADA d'ALEMBERTA

Równanie dynamiczne ruchu punktu ***i*** układu ***n*** punktów materialnych $\boldsymbol{m}_{\mathrm{i}}$ ($\boldsymbol{i}$=**1**...$\boldsymbol{n}$)

$$m_i\overline{a}_i = \overline{P}_i + \overline{S}_i \tag{1}$$

$\overline{P}_i$ – wypadkowa sił zewnętrznych (czynnych i reakcji) działających na punkt ***i***,
$\overline{S}_i$ – siła wewnętrzna (pochodząca od innych punktów układu)

Df. Siła bezwładności (siła d'Alemberta) - fikcyjna siła $\overline{B}_i = -m_i\,\overline{a}_i$

Równanie **(1)** można wtedy zapisać jako

$$\overline{B}_i + \overline{P}_i + \overline{S}_i = 0 \tag{2}$$

Po zsumowaniu równań **(2)** dla wszystkich n punktów układu ($\sum\overline{S}_i = 0$, patrz poprzedni wykład):

$$\sum\overline{B}_i + \sum\overline{P}_i = 0 \tag{3}$$

lub

$$\overline{B}_s + \sum\overline{P}_i = 0 \tag{3a}$$

gdzie $\overline{B}_s = \sum\overline{B}_i = -\sum m_i\overline{a}_i = -M\overline{a}_s$

SIŁA BEZWŁADNOŚCI - ZASADA d'ALEMBERTA – c.d.

Po obustronnym pomnożeniu równania ruchu punktu $\boldsymbol{m}_i$ **(2)** przez poprowadzony z obranego bieguna wektor–promień $\overline{\boldsymbol{r}}_i$ tego punktu i zsumowaniu wszystkich równań:

$$\Sigma(\overline{r}_i \times \overline{B}_i) + \Sigma(\overline{r}_i \times \overline{P}_i) + \Sigma(\overline{r}_i \times \overline{S}_i) = 0$$

Ponieważ momenty od sił wewnętrznych znoszą się wzajemnie, tj. $\Sigma(\overline{r}_i \times \overline{S}_i) = 0$:

$$\Sigma(\overline{r}_i \times \overline{B}_i) + \Sigma(\overline{r}_i \times \overline{P}_i) = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Układ równań wektorowych (3) i (4) przypomina wektorową postać warunków równowagi statyki dla dowolnego układu sił $\overline{F}_i$:

Równanie **(3)**: $\Sigma\overline{F}_i = 0$

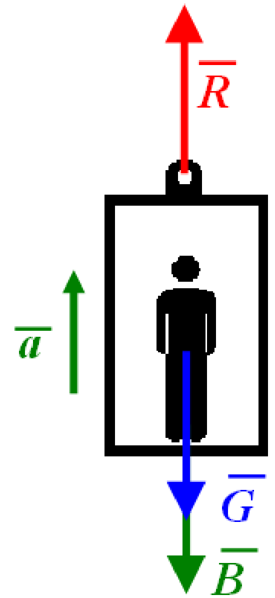
Równanie **(4)**: $\Sigma\overline{M}_i = 0$

<u>Zasada d'Alemberta:</u> Jeżeli do sił zewnętrznych (czynnych i reakcji) działających na układ punktów materialnych będących w ruchu dodamy odpowiednie fikcyjne siły bezwładności, to układ sił czynnych, reakcji i bezwładności pozostaje w równowadze.

Przykład 1:

Winda o ciężarze **G=7350** N zawieszona na linie porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym tak, że w pierwszych **5 s** przebywa **25 m**. Znaleźć siłę naciągu liny przy ruchu windy (a) w górę, (b) w dół i (c) przy ruchu jednostajnym windy.

(a) ruch jednostajnie przyspieszony w górę



$$\overline{G} + \overline{R} + \overline{B} = 0$$

$$R - G - B = 0$$

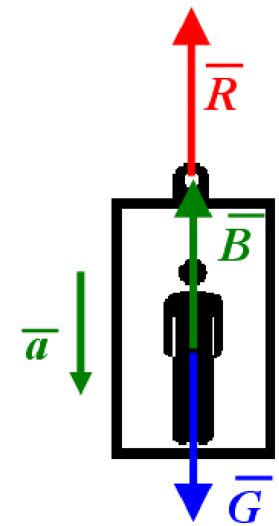
$$a = 2h/t^2 = 2 \cdot 25/\ 5^2 = 2\ \ \mathrm{m/s^2}$$

$$B = ma = (G/g) \cdot a = (7350/9.8) \cdot 2 = 1500\ \mathrm{N}$$

Naciąg liny przy ruchu przyspieszonym w górę wynosi: $R = G + B = 7350 + 1500 = \underline{8850\ \mathrm{N}}$

Przykład 1: c.d.

Winda o ciężarze G=**7350** N zawieszona na linie porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym tak, że w pierwszych **5 s** przebywa **25 m**. Znaleźć siłę naciągu liny przy ruchu windy (a) w górę, (b) w dół i (c) przy ruchu jednostajnym windy.



(b) ruch jednostajnie przyspieszony w dół:

$$\overline{G} + \overline{R} + \overline{B} = 0$$

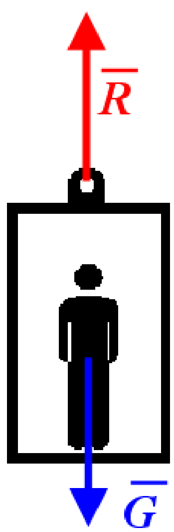
$$R - G + B = 0$$

$$a = 2h/t^2 = 2 \cdot 25/\, 5^2 = 2 \quad \text{m/s}^2$$

$$B = ma = (G/g) \cdot a = (7350/9.8) \cdot 2 = 1500 \text{ N}$$

Naciąg liny przy ruchu przyspieszonym w dół wynosi: $R = G - B = 7350 - 1500 =$ <u>5850 N</u>

(c) ruch jednostajny (w górę lub w dół):



$$a = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$R = G = 7350 \text{ N}$$

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI CIAŁA SZTYWNEGO

__Df.__ Moment bezwładności układu punktów materialnych o masie $\boldsymbol{m}_i$ ($\boldsymbol{i}$**=1, ...**$\boldsymbol{n}$) względem osi $\boldsymbol{l}$

$$\boldsymbol{J_l = \sum m_i\, r_i^2}$$

gdzie $\boldsymbol{r}_i$ – odległość punktu $\boldsymbol{i}$ od prostej

Moment bezwładności ciała sztywnego względem osi $\boldsymbol{l}$

$$J_l = \iiint\limits_V \rho^2 dm$$

gdzie $\boldsymbol{\rho}$ – odległość nieskończenie małego elementu bryły o masie **d**$\boldsymbol{m}$ od prostej $\boldsymbol{l}$

V – objętość bryły

$\boldsymbol{J} \geq 0$,

__Wymiar *J*__: jedn. masy · (jedn. długości)^2 (np. kg·m^2 – jednostka podstawowa układu SI)

__Df.__ promień bezwładności bryły względem prostej $\boldsymbol{l}$

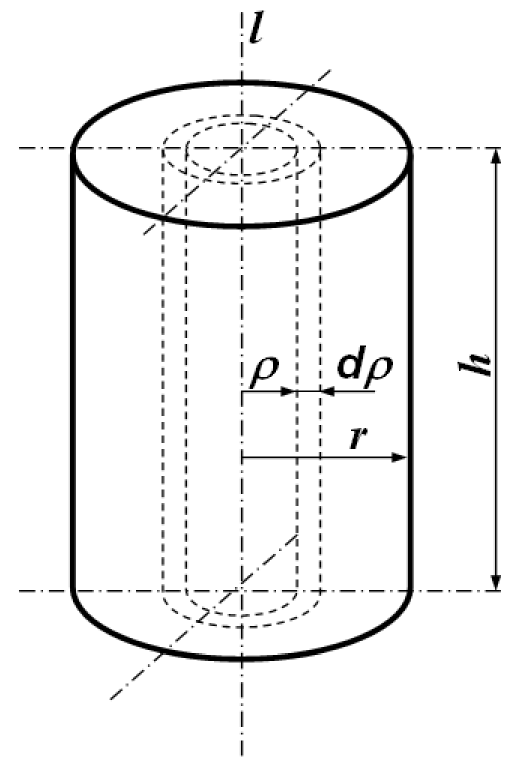
$$i_l = \sqrt{\frac{J_l}{M}},$$

gdzie M – masa całej bryły: **M=**$\boldsymbol{\sum m_i}$

Przykład 2:

Obliczyć moment bezwładności ***J*** oraz promień bezwładności ***i*** walca o promieniu ***r*** i masie *M* względem jego osi ***l***.

$$dm = \gamma \cdot dV = \gamma \cdot h \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho$$



γ - masa właściwa

$$J_l = \int_0^r \rho^2 \gamma \cdot h \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi\gamma h \cdot \frac{r^4}{4} = M\,\frac{r^2}{2}$$

$$i_l = \sqrt{\frac{Mr^2}{2M}} \approx 0.7r$$

Df. Moment zamachowy

Średnica bezwładności $D = 2i$

$$J_l = Mi^2 = \frac{MD^2}{4} = \frac{GD^2}{4g}$$

Stąd **moment zamachowy** $GD^2 = 4g\,J_l$

Df. Masą zredukowaną bryły na daną odległość r od prostej l nazywamy taką masę M_z skupioną w punkcie o odległości r od prostej l, której moment bezwładności względem prostej l jest równy momentowi bezwładności bryły względem tej prostej.

$J_l = M_z r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_z = J_l / r^2}$

Przykład:

M_z walca pełnego o masie M zredukowana do promienia walca wynosi

$$M_z = (Mr^2/2)/r^2 = M/2$$

Wykorzystanie: skupienie masy na obwodzie a nie w tarczy koła zamachowego

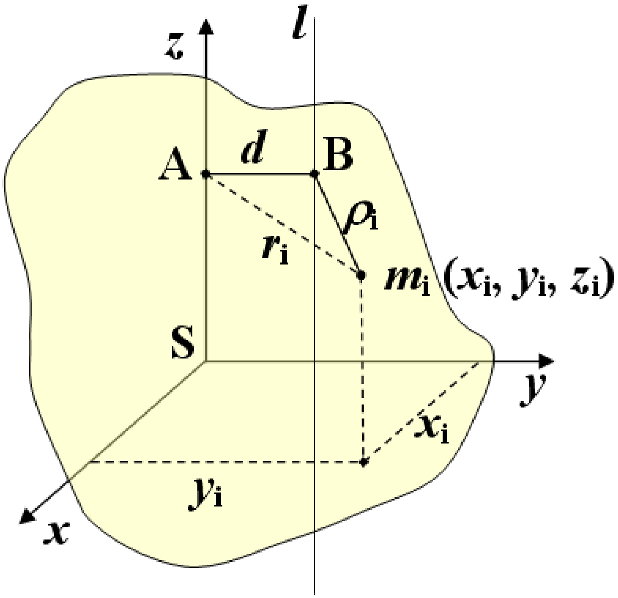
Twierdzenie Steinera

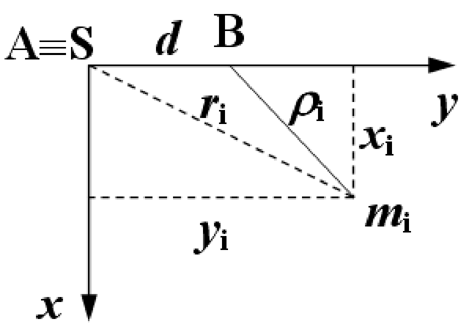
Założenie: oś z przechodzi przez środek masy S układu punktów materialnych (p.m.)

l – prosta $\parallel z$

r_i – odległość p.m. m_i od z

ρ_i – odległość p.m. m_i od l





$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$

$\rho_i^2 = x_i^2 + (y_i - d)^2 = r_i^2 + d^2 - 2y_i d$

$J_z = J_s = \sum m_i r_i^2$

$J_l = \sum m_i \rho_i^2 = \sum m_i r_i^2 + d^2 \sum m_i - 2d \sum m_i y_i$

Ale $\sum m_i y_i = My_s = 0$ ponieważ $y_s = 0$ oraz $\sum m_i = M$, stąd

$$\boxed{J_l = J_s + Md^2}$$

PRACA, MOC, SPRAWNOŚĆ, ENERGIA

Praca

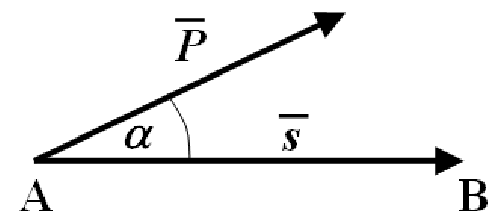
Df. Praca siły $\overline{P}$ stałej co do wartości i kierunku na prostoliniowym przesunięciu $\overline{s}$ jest iloczynem skalarnym wektora siły i wektora przesunięcia punktu jej przyłożenia

$$\boxed{L = \overline{P}\cdot\overline{s} = P\cdot s\cdot \cos(\overline{P},\overline{s})}$$

$\alpha=0 \quad \Rightarrow \quad L = P\cdot s$

$\alpha=90° \quad \Rightarrow \quad L = 0$

$\alpha=180° \quad \Rightarrow \quad L = -P\cdot s$

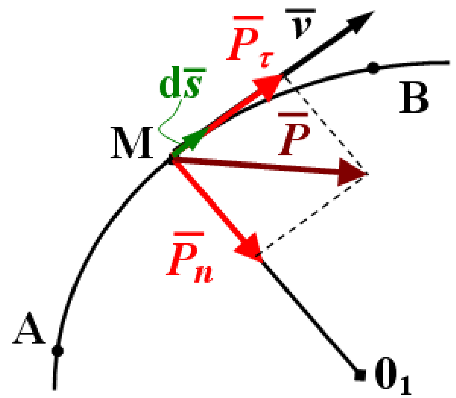


<u>Praca</u> c.d.

1. Punkt przyłożenia zmiennej co do wartości i kierunku siły ***P*** przemieszcza się po krzywoliniowym torze od A do B.

Elementarna praca stałej siły na nieskończenie małym przemieszczeniu **d*s***

$$\delta L = P \cdot ds \cdot \cos(\overline{P}, \overline{\tau}) = P_\tau \cdot ds$$

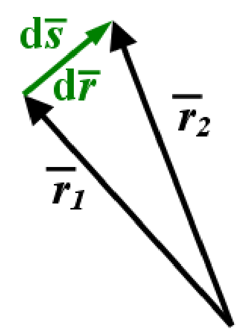


$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \delta L = \int_A^B P_\tau \cdot ds = \int_A^B P_\tau \cdot v \cdot dt$$

Alternatywnie

$d\overline{s} = d\overline{r}$, $\quad d\overline{r}\,(dx, dy, dz)$

$$\delta L = \overline{P} \cdot d\overline{r} = P_x dx + P_y dy + P_z dz$$



$$L = \int_A^B \left(P_x dx + P_y dy + P_z dz\right)$$

(całka krzywoliniowa!)

lub

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left(P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z}\right) dt$$

Praca c.d.

Przykład: Praca siły ciężkości działającej na punkt M na przemieszczeniu AB.

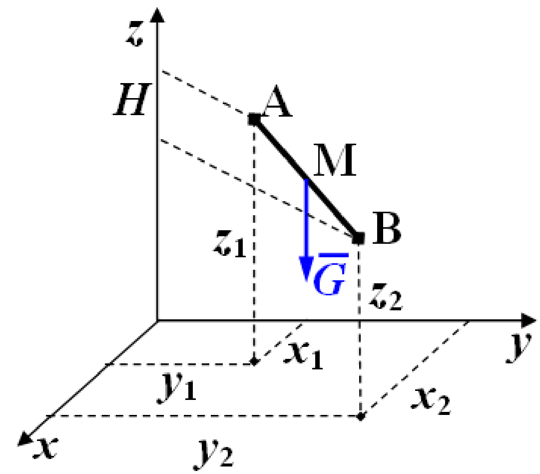
$\overline{G}$ **(0, 0, -G)**

$\delta L = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -G dz$

$$L = \int_{z_1}^{z_2} -G dz = -G(z_2 - z_1) = GH$$

$z_1 > z_2 \quad \Rightarrow \quad L > 0$

$z_1 < z_2 \quad \Rightarrow \quad L < 0$



Praca c.d.

2. Praca sił w ruchu ciała sztywnego pod wpływem sił $\overline{P}_1 \ldots \overline{P}_n$

(a) ruch postępowy

$d\overline{r}_i = d\overline{r}$

$\delta L_i = \overline{P}_i \cdot d\overline{r}$ – **praca siły** P_i

$\delta L = \sum \delta L_i = \sum \overline{P}_i \cdot d\overline{r} = d\overline{r} \cdot \sum \overline{P}_i$

$\sum \overline{P}_i = \overline{W}$ – **wektor główny**

$\delta L = \overline{W} \cdot d\overline{r}$

$$L = \int_I^{II} \overline{W} \frac{d\overline{r}}{dt} \cdot dt = \int_I^{II} \overline{W} \cdot \overline{v} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(W_x \dot{x} + W_y \dot{y} + W_z \dot{z} \right) dt$$

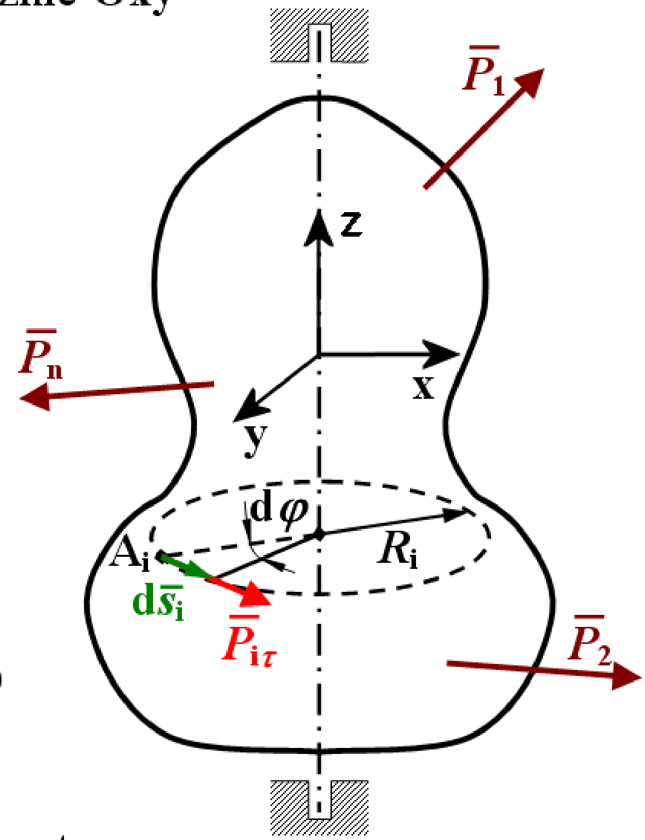
$$\boxed{L = \int_I^{II} \overline{W} \cdot d\overline{r} = \int_I^{II} \left(W_x dx + W_y dy + W_z dz \right)}$$

Praca c.d.

2. Praca sił w ruchu ciała sztywnego pod wpływem sił $\overline{P}_1 \ldots \overline{P}_n$

(b) ruch obrotowy

Punkt przyłożenia siły $\overline{P}_i$ opisuje okrąg o promieniu R_i w płaszczyźnie **Oxy**



$M_{iz} = P_{i\tau} \cdot R_i$

$\mathbf{d}s_i = R_i\, \mathbf{d}\varphi$

$\overline{P}_i\, (P_{i\tau}, P_{in}, P_{iz})$

Elementarna praca siły $\overline{P}_i$ na przemieszczeniu $\mathbf{d}\overline{s}_i$

$\delta L_i = P_{i\tau} \cdot \mathbf{d}s_i = P_{i\tau}\, R_i\, \mathbf{d}\varphi = M_{iz}\, \mathbf{d}\varphi$

Elementarna praca wszystkich sił $P_1 \ldots P_n$ na przemieszczeniu $\mathbf{d}s_i$

$\delta L = \sum \delta L_i = \mathbf{d}\varphi \sum M_{iz}$

$\sum M_{iz} = M_z$ (suma momentów wszystkich sił względem osi obrotu)

$\delta L = M_z\, \mathbf{d}\varphi$

Jeżeli przy obrocie ciała wartość kąta obrotu zmienia się od φ_1 do φ_2 to:

$$\boxed{L = M_z \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M_z(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

MOC SIŁY, SPRAWNOŚĆ

Df. Moc siły – zmiana pracy siły odniesiona do jednostki czasu

$$\boxed{N = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{P}\, d\overline{r}\right) = \frac{\overline{P} \cdot d\overline{r}}{dt} = \overline{P} \cdot \overline{v}}$$

Wniosek: **Moc** = iloczynowi skalarnemu wektora siły i wektora prędkości punktu jej przyłożenia.

Jeżeli $\overline{P} \parallel \overline{v}$ to $N = Pv$

Ruch obrotowy ze stałym momentem M_z

$$\boxed{N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega}$$

$L = L_u + L_o$
L_u – praca użyteczna
L_o – praca oporów

Sprawność: $\boxed{\eta = L_u / L = N_u / N;}$ $\eta < 1$

ENERGIA KINETYCZNA

(a) Energia kinetyczna punktu

$$m\ddot{x} = P_x; \qquad m\ddot{y} = P_y; \qquad m\ddot{z} = P_z; \qquad \overline{P} = \sum \overline{P}_i$$

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z} \qquad \text{(a)}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) \qquad \text{(b)}$$

(a) $\Rightarrow$ $(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{m}(P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z})$

(b) $\Rightarrow$ $(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt} = P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z}}$$

Energia kinetyczna punktu c.d.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(P_x\dot{x}+P_y\dot{y}+P_z\dot{z}\right)dt$$

dla $t=t_1 \rightarrow v=v_1$ dla $t=t_2 \rightarrow v=v_2$

$$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=L$$

Energia kinetyczna: $\boxed{E=\frac{1}{2}mv^2}$

Zasada równowartości energii kinetycznej i pracy: $\boxed{E_2-E_1=L}$

Przyrost energii kinetycznej w pewnym odstępie czasu równy jest pracy sił zewnętrznych (czynnych i reakcji) działających w tym czasie.

<u>**Wnioski:**</u> gdy L**=0** to $E_2-E_1=0 \Rightarrow v_1=v_2=const$ co do wartości (ruch jednostajny)

Np. gdy $\bar{P}$**=const** i $\bar{P}\perp$ **toru** ($d\bar{s}$, $\bar{v}$) w czasie jednostajnego ruchu po okręgu.

(b) Energia kinetyczna ciała sztywnego

Ruch postępowy

$v_i = v$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}Mv^2; \qquad M = \sum m_i}$$

Ruch obrotowy

$$E = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2 \omega_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2 \quad , \qquad \omega_i = \omega$$

Ponieważ moment bezwładności względem osi obrotu: $J_z = \sum m_i r_i^2$

Ostatecznie:

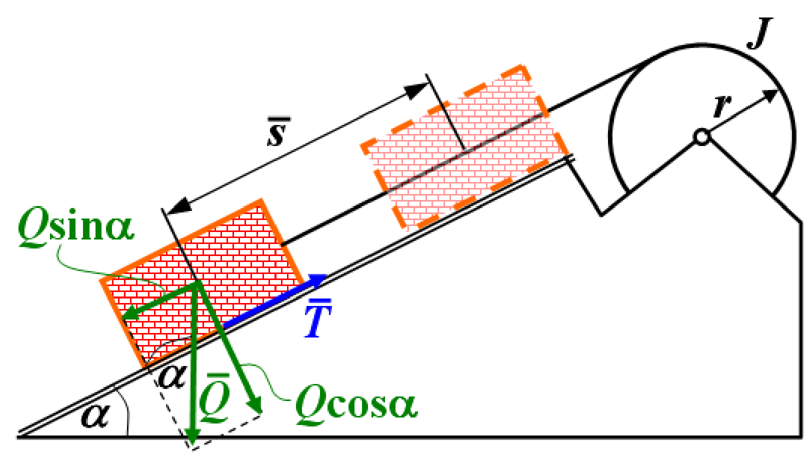
$$\boxed{E = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}}$$

Przykład

Ciężar $\overline{Q}$ zawieszony na linie przerzuconej przez krążek zaczyna się poruszać po równi pochyłej o kącie nachylenia α. Obliczyć prędkość ciężaru $\overline{Q}$ po przebyciu drogi s, jeżeli wiadomo, że współczynnik tarcia między równią a ciężarem wynosi μ, promień krążka r, a jego moment bezwładności względem osi obrotu J. Tarcie w łożyskach krążka pominąć.

$\boldsymbol{E_2 - E_1 = L}$

$$E_1 = 0\,; \qquad E_2 = \frac{Q}{2g}v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\,; \qquad \omega = \frac{v}{r}$$



$$E_2 = \frac{Q}{2g}v^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$L = (Q\sin\alpha - T)s\,; \quad T = \mu N = \mu Q\cos\alpha$$

Stąd: $L = (Q\sin\alpha - \mu Q\cos\alpha)s$

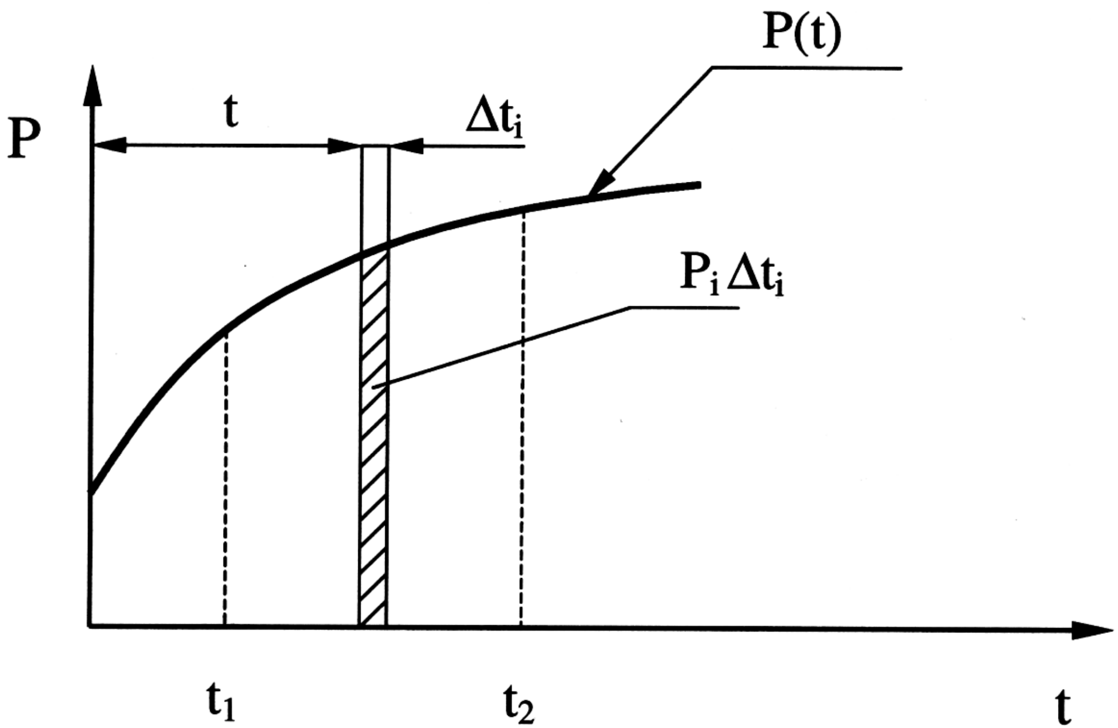
Z zasady równowartości energii kinetycznej i pracy: $\boldsymbol{E_2 - E_1 = L}$

$$E_2 = \frac{Q}{2g}v^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2 = (Q\sin\alpha - \mu Q\cos\alpha)s$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2Qs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\dfrac{Q}{g} + \dfrac{J}{r^2}}}}$$

Pęd i popęd siły

Popęd siły $\overline{P}(t)$ w przedziale czasu $t_2 - t_1$

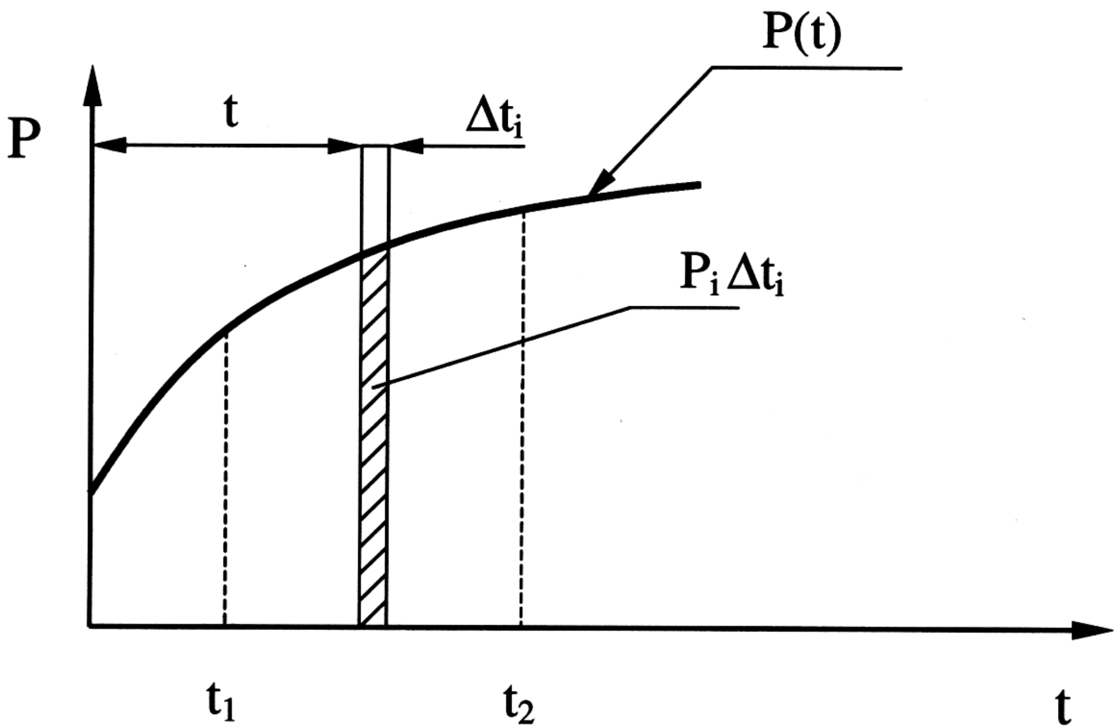


$$\overline{\Pi} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P} dt$$

$$\overline{\Pi}_x = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}_x(t) dt \qquad \overline{\Pi}_y = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}_y(t) dt \qquad \overline{\Pi}_z = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}_z(t) dt \qquad \Pi = \sqrt{\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2}$$

Pęd i popęd siły

Popęd siły $\overline{P}(t)$ w przedziale czasu $t_2 - t_1$



Jeżeli na punkt materialny działa układ sił $\overline{P}_1, ..., \overline{P}_n$ to

$$\overline{\Pi} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}_1 dt + \ldots + \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}_n dt = \int_{t_1}^{t_2} (\overline{P}_1 + \ldots + \overline{P}_n) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\overline{W} + \overline{W}_R) dt$$

lub

$$\overline{\Pi} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\Pi}_i$$

Pęd punktu materialnego („ilość ruchu”) jest to wektor $m\overline{v}$

$m\overline{a} = \overline{P}$ $\qquad$ $m\overline{a} = m\dfrac{d\overline{v}}{dt} = \dfrac{d(m\overline{v})}{dt}$ $\qquad$ stąd $\qquad$ $\overline{P}dt = d(m\overline{v})$

$$\int_{v_1}^{v_2} d(m\overline{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}dt \qquad \text{lub} \qquad \underline{m\int_{v_1}^{v_2} d\overline{v} = m(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}dt}$$

Jest to tzw. **<u>zasada pędu i popędu dla punktu materialnego</u>**:

Przyrost geometryczny (wektorowy) pędu w pewnym odstępie czasu równy jest popędowi sił działających w tym odstępie czasu.

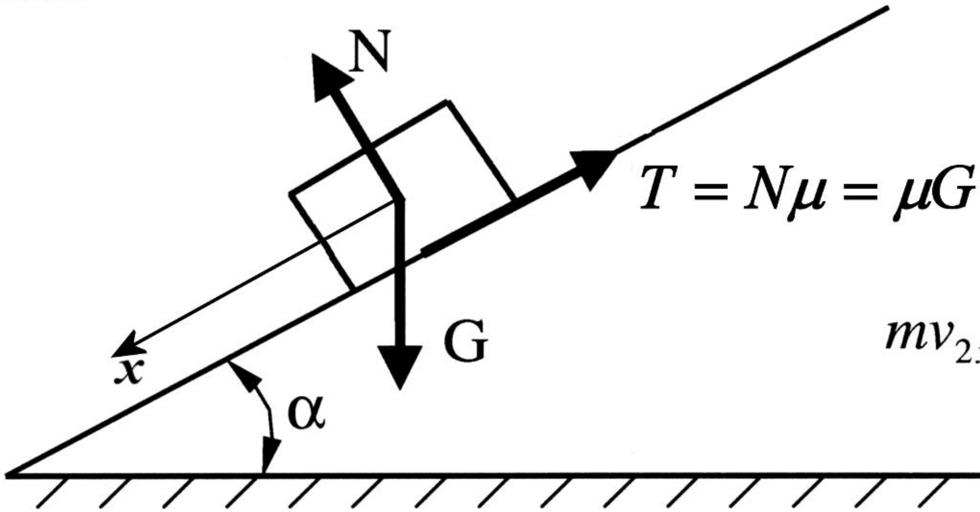
Jeżeli $\overline{P} = 0$ to $m\overline{v}_2 = m\overline{v}_1$, tzn. pęd punktu materialnego jest stały.

<u>Zasada zachowania pędu.</u>

Jeżeli układ sił działających na punkt materialny pozostaje w równowadze, to pęd punktu jest stały.

Przykład

Ciało o ciężarze $\overline{G}$ zsuwa się po chropowatej równi pochyłej nachylonej pod kątem α do poziomu. Współczynnik tarcia wynosi μ. W chwili początkowej prędkość ciała wynosi $\overline{v}$. Po jakim czasie prędkość ciała będzie 2 razy większa?



$$T = N\mu = \mu G \cos\alpha$$

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \int_{t_1=0}^{t_2=t} P_x \, dt$$

Ponieważ $P_x = const.$ więc $\int_0^t P_x dt = P_x t = (G\sin\alpha - T)t = G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$

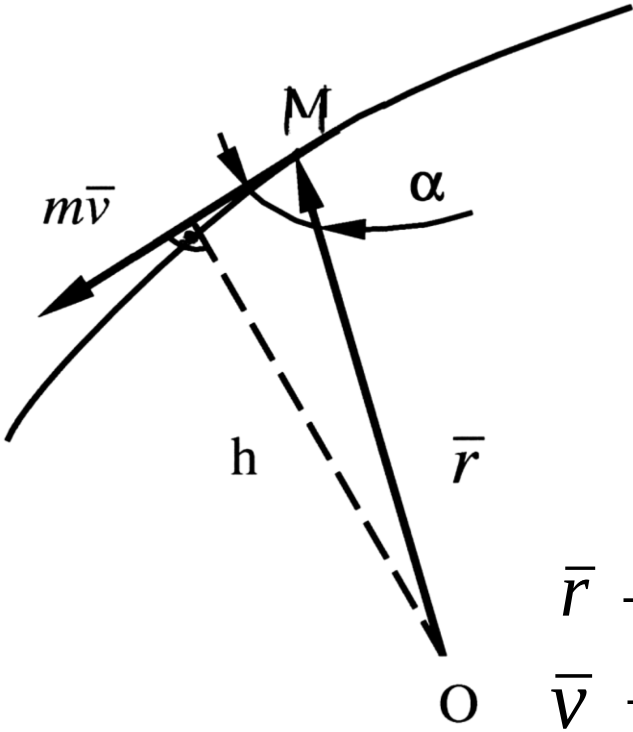
stąd $2mv - mv = G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$

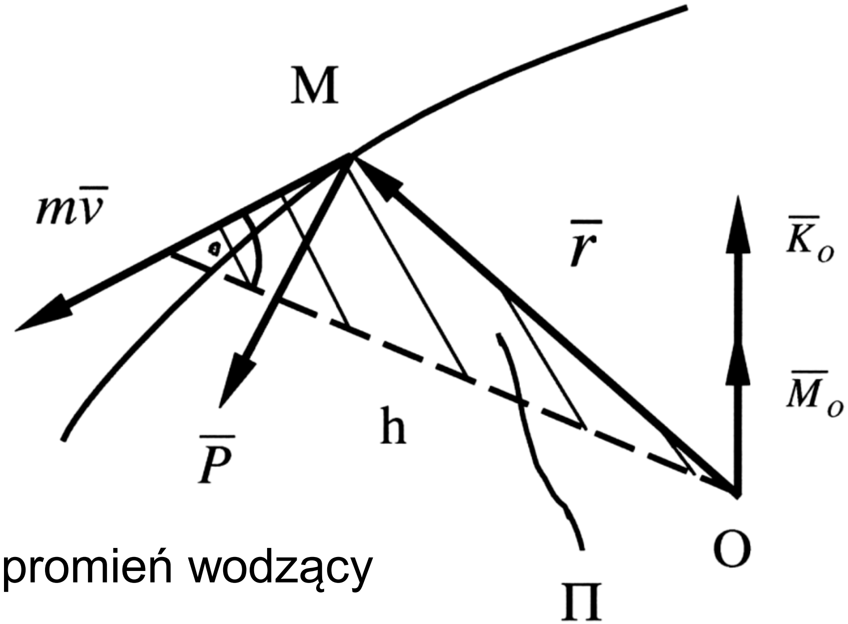
$$t = \frac{v}{G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t}$$

Kręt

Niech punkt materialny M o masie m porusza się po krzywej płaskiej (w płaszczyźnie Π).

$\overline{r}, \overline{P}, \overline{v}$ - w płaszczyźnie Π





$\overline{r}$ – wektor promień wodzący

$\overline{v}$ – prędkość punktu M względem bieguna O

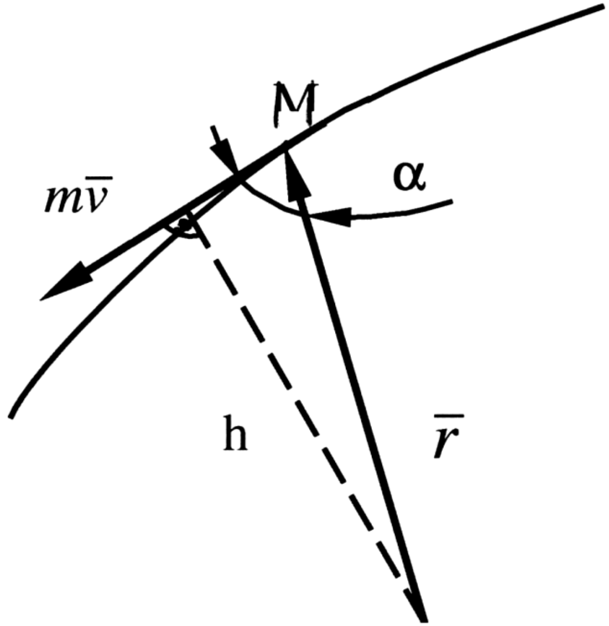
Krętem punktu M względem bieguna O nazywamy wektor

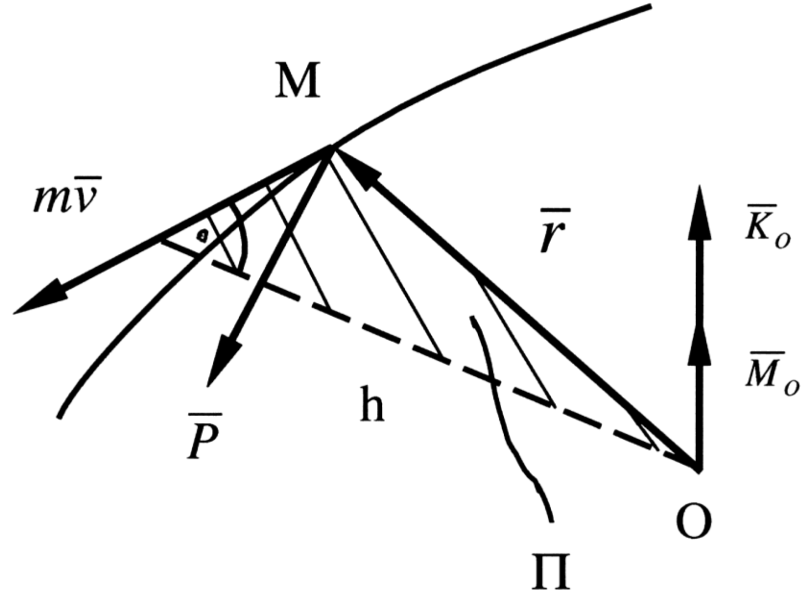
$$\overline{K}_O = \overline{r} \times m\overline{v}, \qquad \overline{K} \perp \Pi$$

$$\left|\overline{K}\right| = K = mv \cdot r \sin\left(\overline{r}, \overline{v}\right) = mv \cdot h$$

Kręt

$\overline{r}, \overline{P}, \overline{v}$ - w płaszczyźnie Π





Załóżmy, że ruch punktu materialnego odbywa się pod działaniem siły $\overline{P}$ (w płaszczyźnie Π). Moment tej siły względem bieguna O wynosi $\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{P}$

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \frac{d\overline{r}}{dt} \times m\overline{v} + \overline{r} \times m\frac{d\overline{v}}{dt}$$

UWAGA! $\overline{v}$ jest prędkością punktu względem bieguna O.

ale $\frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v}, \quad \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{a}$ stąd $\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{v} \times m\overline{v} + \overline{r} \times m\overline{a}$

Kręt

Kąt między wektorem $\bar{v}$ i $m\bar{v} = 0$ stąd $\bar{v} \times m\bar{v} = 0$

W takim razie $\dfrac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{r} \times \bar{P} = \bar{M}_O$

Jeżeli na punkt M działa suma sił czynnych i reakcji to $\bar{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{iO}$

czyli $\boxed{\dfrac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{iO}}$ Pochodna względem czasu krętu punktu materialnego obliczonego względem bieguna O równa jest sumie geometrycznej momentów sił działających na ten punkt liczonych względem tego bieguna.

Jest to **zasada krętu dla punktu materialnego**.

<u>Kręt</u>

Jeżeli $\dfrac{d\overline{K}_O}{dt} = 0$ to $\overline{K}_O = const.$ - jeżeli suma geometryczna momentów sił działających na punkt materialny liczonych względem bieguna O jest równa zero, to kręt tego punktu materialnego jest stały.

<u>Kręt układu punktów materialnych względem bieguna O</u> równy jest sumie geometrycznej krętów wszystkich punktów materialnych względem tego bieguna tzn. $\overline{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{K}_{iO} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{r}_i \times m\overline{v}_i)$

DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO

Równanie dynamiczne ciała sztywnego w ruchu postępowym

Z twierdzenia o ruchu środka masy mamy: $\sum m_i \overline{a}_i = M \cdot \overline{a}_S$

ale $\overline{a}_i = const. = \overline{a}$, więc $\overline{a}_i \sum m_i = M \cdot \overline{a}_S$, stąd $\overline{a}_S = \overline{a}$

Równanie ruchu środka masy ma więc postać: $M \cdot \overline{a} = \sum \overline{P}_i$ lub

$$M\ddot{x} = \sum P_{ix}$$
$$M\ddot{y} = \sum P_{iy}$$
$$M\ddot{z} = \sum P_{iz}$$

$\sum \overline{P}_i$ - suma sił czynnych i reakcji

DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO

Ustalimy teraz jaki układ sił zewnętrznych spowoduje ruch postępowy.

Zastosujemy twierdzenie o pochodnej krętu przyjmując biegun w środku masy

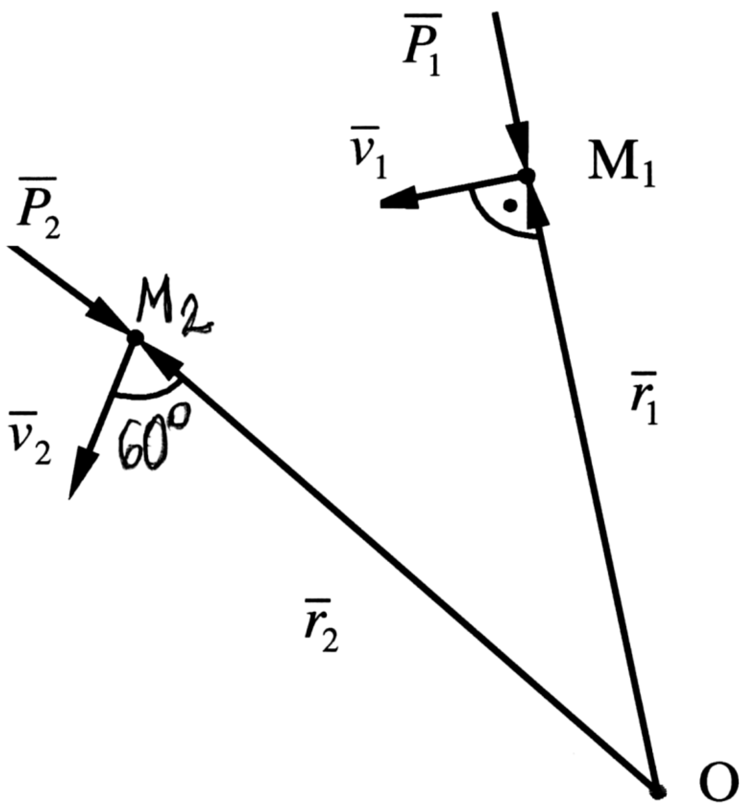
$$\frac{d\overline{K}_S}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{iS}$$

Ponieważ wszystkie punkty ciała mają taką samą prędkość, jak środek masy, to prędkości tych punktów względem środka masy są równe zero, więc $\overline{K}_S = 0$,

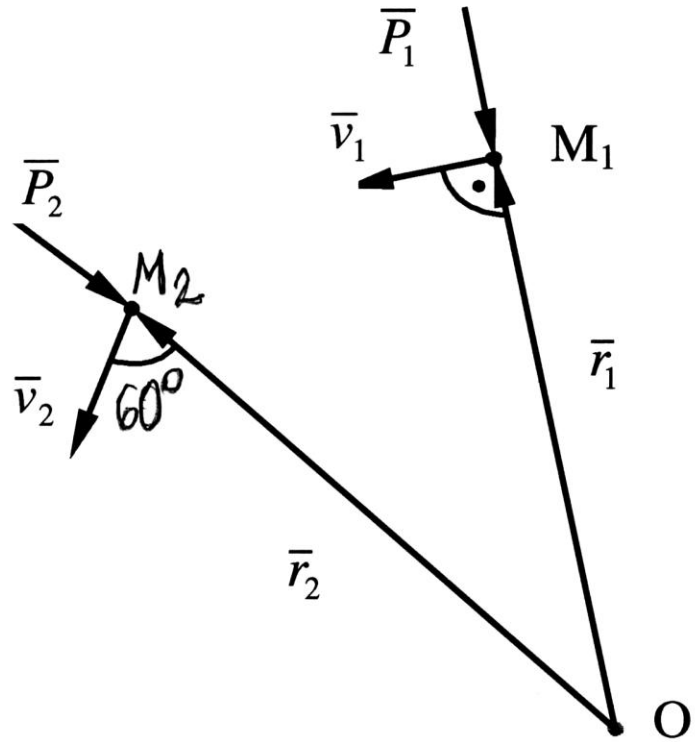
a więc i $\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{iS} = 0$. Jest to warunek konieczny, by ciało poruszało się ruchem postępowym.

Przykład

Punkt materialny M o masie m porusza się pod działaniem siły $\overline{P}$, której prosta działania stale przechodzi przez nieruchomy punkt O. Znaleźć prędkość punktu w położeniu M_2, jeżeli w położeniu M_1 jego prędkość wynosi v_1=4m/s, przy czym $\frac{OM_1}{OM_2} = \frac{3}{2}$ a kąt jaki tworzy $\overline{v}_2$ z $\overline{P}$ wynosi α=60° zaś $\overline{v}_1$ z $\overline{P}$ 90°.



Rozwiązanie



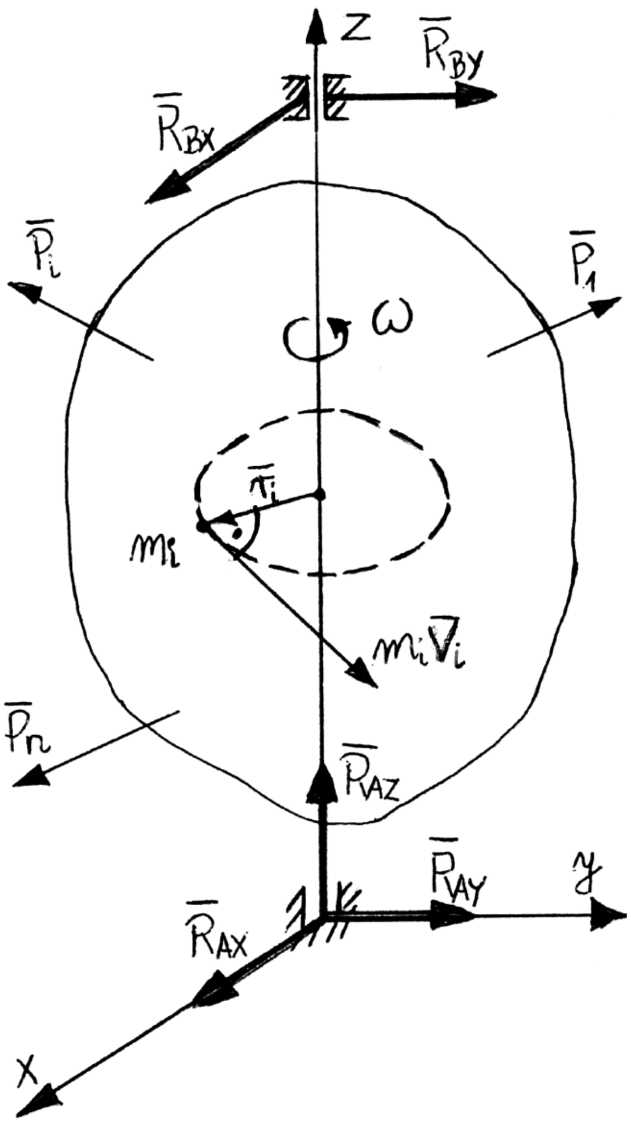
$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{P} = 0$$ bo w każdym położeniu $\overline{P} \parallel \overline{r}$

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \overline{K}_O = const. \qquad \overline{K}_{1O} = \overline{K}_{2O}$$

$$\overline{r}_1 \times m\overline{v}_1 = \overline{r}_2 \times m\overline{v}_2 \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad r_1 \cdot v_1 \cdot \sin 90^\circ = r_2 \cdot v_2 \cdot \sin 60^\circ$$

$$r_1 \cdot 4 = \frac{2}{3} \cdot r_1 \cdot v_2 \cdot 0{,}866 \qquad \rightarrow \qquad v_2 = 6{,}93 \frac{m}{s}$$

Równanie dynamiczne ciała sztywnego w ruchu obrotowym



$$\overline{K}_{iz} = \overline{r}_i \times (m\overline{v})_i$$

$$K_{iz} = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$$

$$K_z = \sum K_{iz} = \sum m_i r_i^2 \omega = J_z \omega$$

Ponieważ $\dfrac{dK_z}{dt} = \sum M_{iz}$, to

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \frac{dK_z}{dt} = \sum M_{iz}$$

czyli $J_z \varepsilon = \sum M_{iz}$

Przyspieszenie kątowe ε≠0 tylko wtedy gdy $\sum M_{iz} \neq 0$

PRZYKŁAD 1

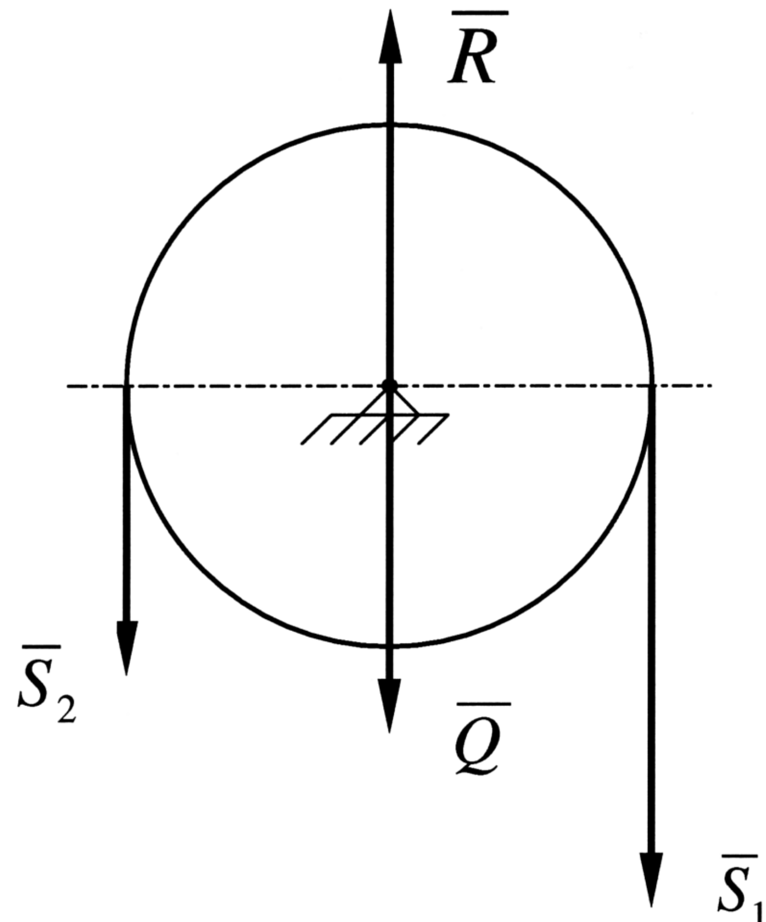
Wyznaczyć przyspieszenie koła pasowego o promieniu r, ciężarze $\overline{Q}$ i promieniu bezwładności względem osi obrotu i. Na koło działają naciągi części pędzącej i pędzonej pasa $\overline{S}_1$ i $\overline{S}_2$.

$$J_z \cdot \varepsilon = \sum M_{iz}$$

$$J_z = m \cdot i^2 = \frac{Q}{g} i^2$$

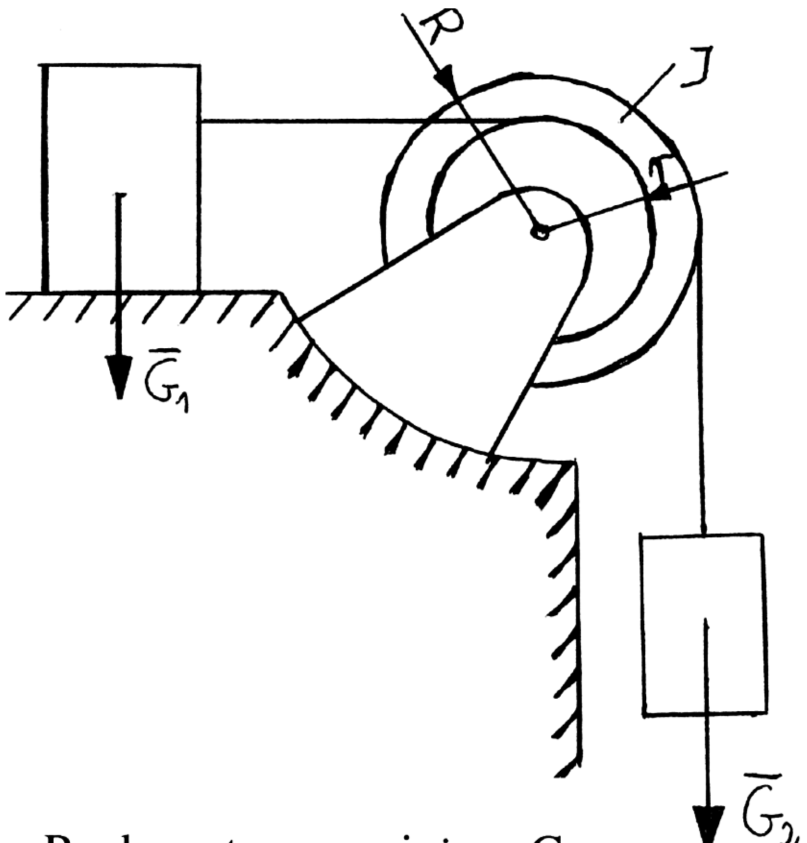
$$\sum M_{iz} = (S_1 - S_2) r$$

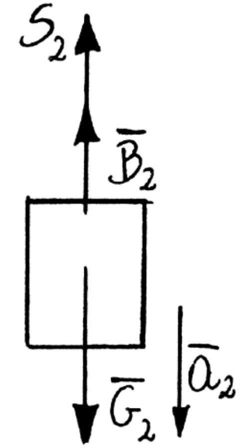
$$\varepsilon = \frac{(S_1 - S_2) r \cdot g}{Q i^2}$$

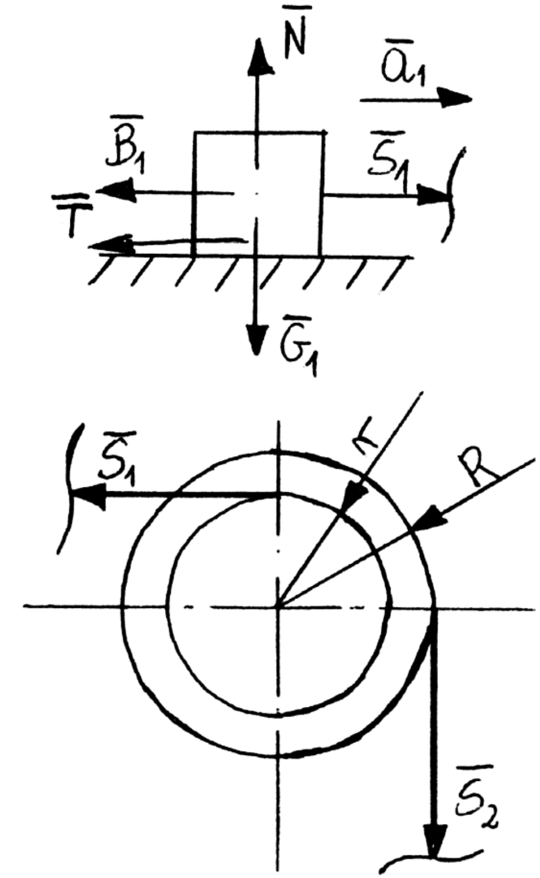


PRZYKŁAD 2

Dla układu przedstawionego na rysunku obliczyć przyspieszenie kątowe krążka, jeżeli G_1=500N, G_2=4000N, J=1000Nm^2, R=0.2m, r=0.1m, μ=0.4.







Ruch postępowy ciężaru G_1

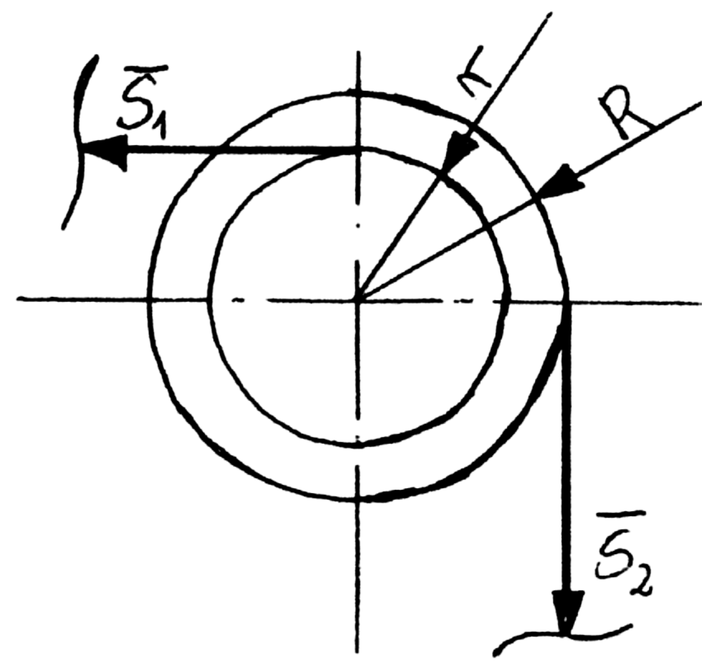
$S_1 - B_1 - T = 0$, $\quad T = \mu N = \mu G$, $\quad B_1 = \dfrac{G_1}{g} a_1$, stąd

równanie ruchu: $$S_1 = \frac{G_1}{g} a_1 + \mu G_1 \qquad (1)$$

Ruch obrotowy krążka

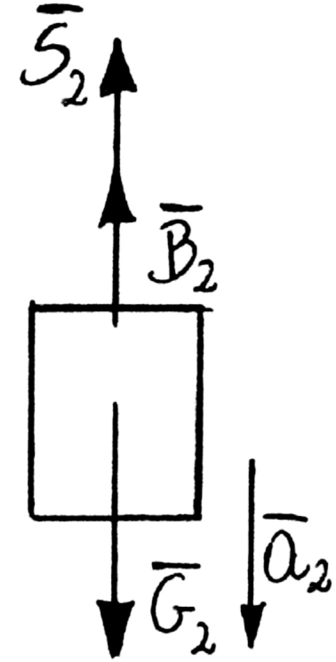
$$J_z \cdot \varepsilon = \sum M_{iz}\,, \qquad \sum M_{iz} = S_2 R - S_1 r\,, \qquad \text{stąd}$$

$$J_z \varepsilon = S_2 R - S_1 r \qquad (2)$$



$$\boxed{J_z\varepsilon = S_2 R - S_1 r \quad (2)}$$

Ruch postępowy ciężaru G_2



$$G_2 - B_2 - S_2 = 0, \qquad B_2 = \frac{G_2}{g} a_2,$$

stąd

stąd

$$\boxed{S_2 = G_2 - \frac{G_2}{g} a_2 \qquad (3)}$$

Ponadto $a_1 = r\varepsilon$ (a)

$a_2 = R\varepsilon$ (b)

Po podstawieniu (1) i (3) do (2) i uwzględnieniu (a) i (b):

$$\varepsilon = \frac{G_2 R - \mu G_1 r}{J_z + \frac{G_2}{g} r^2 + \frac{G_1}{g} R^2} = \underline{6.7\ (s^{-2})}$$