

**Wprowadzenie nr 6* do ćwiczeń z przedmiotu
„Wytrzymałość materiałów” przeznaczone dla studentów
II roku studiów dziennych I stopnia w kierunku
„Energetyka” na wydz. Energetyki i Paliw, w semestrze
zimowym 2012/2013**

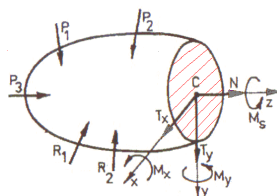
Zakres wprowadzenia nr 6

To wprowadzenie dotyczy ćwiczenia, na którym każdy student samodzielnie opracowuje „**Arkusze ćwiczeniowy nr 6**”. Opracowując ten arkusz studenci nabywają umiejętność analizy oraz oceny naprężeń spowodowanych w materiale przez takie przypadki sił zewnętrznych, jak: ścinanie techniczne, skręcanie oraz zginanie ze skręcaniem.

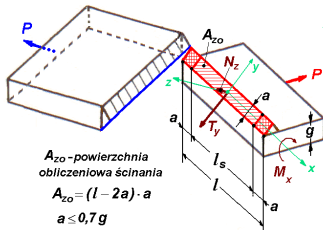
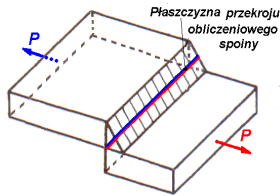
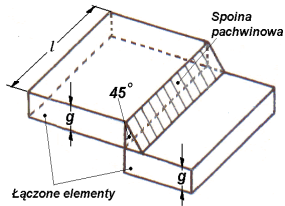
*Autorem wprowadzenia jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH. Wprowadzenie (9 stron) stanowi przedmiot prawa autorskiego określonego w Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. 1994 r. Nr 24 poz.83 z późn. zm.). Autor nie wyraża zgody na inne wykorzystywanie wprowadzenia niż podane w jego przeznaczeniu

Ścinanie techniczne

jest przypadkiem takich sił zewnętrznych P_i , R_i działających na element mechaniczny, dla których, w przekroju tego elementu najbardziej narażonym na zniszczenie, uzyskuje się układ obciążeń wewnętrznych spełniający następujące założenia:



- można pominąć wewnętrzne momenty zginające M_x , M_y oraz i moment skręcający M_s ,
- można pominąć siłę wewnętrzną normalną N , rozciągającą lub ściskającą,
- można uznać jedną z sił wewnętrznych tnących T_x lub T_y za wystarczającą do wyznaczenia maksymalnych naprężeń analizowanego przekroju.



Najczęstszy przypadek ścinania technicznego w elementach konstrukcji

Spoiny pachwinowe w połączeniach blach (1)

- Założenia dla sił wewnętrznych spoiny:

$$M_x \approx 0, M_y = M_z = 0, N_y \approx 0, T_x = 0$$

$$T_y \approx P$$

- założenia dla stanu naprężeń spoiny:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y \approx 0, \sigma_z \approx 0 \quad \tau_{xy} = 0, \tau_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = \frac{T_y}{A_{zo}} = \frac{P}{A_{zo}}$$

A_{zo} – powierzchnia obliczeniowa ścinania spoiny

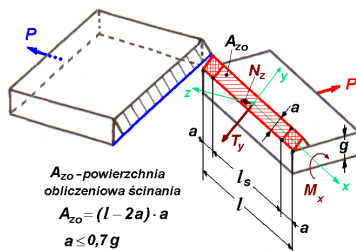
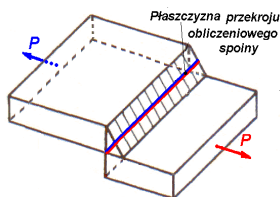
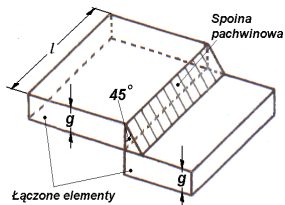
$$A_{zo} = l_s \cdot a = (l - 2a) a$$

l_s – długość obliczeniowa spoiny,

l – długość konstrukcyjna spoiny,

a – grubość spoiny.

3



Spoiny pachwinowe w połączeniach blach (2)

Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa spoiny pachwinowej:

$$\tau_{yz} = \frac{T_y}{A_{zo}} = \frac{P}{A_{zo}} \leq k_{ts}$$

k_{ts} – naprężenie dopuszczalne na ścinanie dla materiału spoiny,

A_{zo} – powierzchnia obliczeniowa ścinania spoiny pachwinowej :

$$A_{zo} = l_s \cdot a = (l - 2a) a$$

l_s – długość obliczeniowa spoiny,

l – długość konstrukcyjna spoiny,

a – grubość spoiny, przy czym:

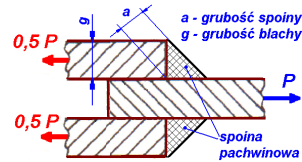
$a_{max} = 0,7g$, gdzie g - grubość blachy

4

Przykład obliczeniowy nr 1

Sprawdzić warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa spoin w połączeniu blach wg rysunku. Zaznaczyć przekroje obliczeniowe spoin, a obliczenia wykonać dla danych:

$$P = 35 \text{ kN}, a = 10 \text{ mm}, l = 50 \text{ mm}, k_{ts} = 60 \text{ MPa}$$



Rozwiązanie

a. Każda spoina przenosi siłę wewnętrzną

$$T_y = 0,5P.$$

b. Powierzchnia obliczeniowa ścinania spoiny

$$A_{zo} = l_s \cdot a = (l - 2a)a = (50 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}) \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

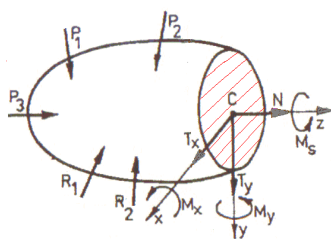
c. Sprawdzenie warunku wytrzymałościowego bezpieczeństwa :

$$\tau_{yz} = \frac{T_y}{A_{zo}} = \frac{0,5 \cdot P}{A_{zo}} = \frac{0,5 \cdot 35 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 58,3 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 58,3 \text{ MPa} < k_t = 60 \text{ MPa}$$

Warunek jest spełniony

5

Skęrcanie pręta o przekroju kołowym

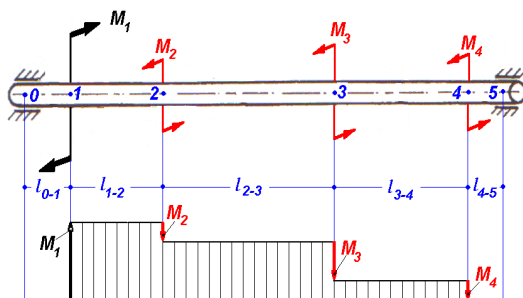


jest przypadkiem takich sił zewnętrznych \mathbf{P}_i , \mathbf{R}_i działających na pręt, dla których uzyskuje się obciążenia wewnętrzne przekrojów pręta zawierające różny od zera tylko moment skęrcający \mathbf{M}_s .

6

Najczęstszy przypadek techniczny skręcania prętów Wały napędowe

Wał napędowy przekazuje zewnętrzny moment obrotowy M_1 od silnika do urządzeń napędzanych momentami M_2, M_3, M_4

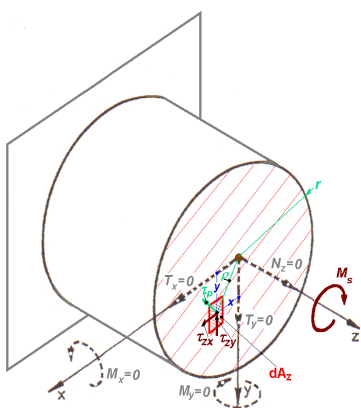


$$M_1 - M_2 - M_3 - M_4 = 0$$

Przekazywanie zewnętrznego momentu obrotowego wywołuje wewnątrz wału wewnętrzny **moment skręcający**, który zmienia się wzdłuż długości wału

7

Obliczanie naprężeń wywołanych przez moment skręcający w przekroju kołowym pręta



Zwykle oblicza się naprężenie τ_ρ jako naprężenie wypadkowe dwu naprężeń stycznych τ_{zx} , τ_{zy} , działających w punkcie przekroju leżącym na okręgu o promieniu ρ :

$$\tau_\rho(\rho) = \sqrt{\tau_{zx}^2(\rho) + \tau_{zy}^2(\rho)} = \frac{M_s}{J_o} \cdot \rho,$$

M_s – moment skręcający dla analizowanego przekroju kołowego,

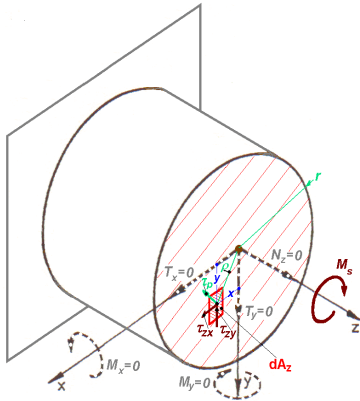
J_o – biegunowy moment bezwładności analizowanego przekroju kołowego obliczany jako:

$$J_o = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

r, d – odpowiednio promień oraz średnica analizowanego przekroju kołowego.

8

Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa pręta skręcanego o przekroju kołowym



$$\tau_{max} = \frac{M_s}{J_o} r = \frac{M_s}{W_o} \leq k_s$$

τ_{max} - maksymalne naprężenie styczne w analizowanym przekroju kołowym, działające na jego obwodzie,

M_s - moment skręcający dla analizowanego przekroju kołowego,

J_o - biegunowy moment bezwładności analizowanego przekroju kołowego obliczany jako:

$$J_o = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

r, d - odpowiednio promień oraz średnica analizowanego przekroju kołowego,

$\frac{J_o}{r} = W_o$ - wskaźnik wytrzymałości przekroju kołowego na skręcanie,

k_s - naprężenie dopuszczalne materiału pręta na skręcanie.

9

Przykład obliczeniowy nr 2

Sprawdzić warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa na skręcanie pręta z przekrojem kołowym o średnicy $d = 50$ mm, jeżeli moment skręcający ma wartość $M_s = 2$ kNm, a naprężenie dopuszczalne materiału pręta na skręcanie wynosi $k_s = 90$ MPa.

Rozwiązanie

a. Obliczenie biegunowego momentu bezwładności przekroju pręta:

$$J_o = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (50 \cdot 10^{-3})^4}{32} = 61,3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

b. Obliczenie wskaźnika wytrzymałości przekroju pręta na skręcanie:

$$W_o = \frac{J_o}{r} = \frac{2J_o}{d} = \frac{2 \cdot 61,3 \cdot 10^{-8}}{50 \cdot 10^{-3}} = 24,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

c. Sprawdzenie warunku wytrzymałościowego bezpieczeństwa :

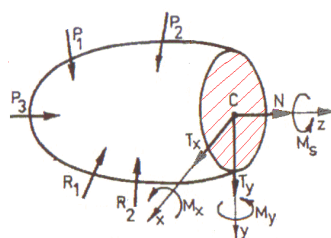
$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_o} = \frac{2 \cdot 10^3}{24,5 \cdot 10^{-6}} = 81,6 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 81,6 \text{ MPa} < k_s = 90 \text{ MPa}$$

Warunek jest spełniony

10

Zginanie z równoczesnym skręcaniem

jest przypadkiem takich sił zewnętrznych P_i , R_i działających na element mechaniczny, którym, w najbardziej narażonym na zniszczenie przekroju tego elementu, odpowiadają obciążenia wewnętrzne zawierające różne od zera tylko dwa momenty:



- moment zginający M_x lub M_y ,
- moment skręcający M_s .

11

Zginanie z równoczesnym skręcaniem (c.d.)

Zginanie z równoczesnym skręcaniem wywołuje w materiale równoczesne występowanie naprężeń normalnych i stycznych.

W takich przypadkach, ocenę bezpieczeństwa materiału przeprowadza się analizując zastępczy stan naprężeń nazywany **wyężeniem**.

Wyężenie, to

jednoosiowy stan naprężeń głównych, którym zastępuje się rzeczywisty stan naprężeń w celu oceny tego stanu ze względu na wytrzymałość materiału.

W praktyce inżynierskiej parametrem wyężenia materiału jest tzw. **naprężenie zredukowane σ_{red}** , które oblicza się za pomocą **hipotez wyężeniowych**.

12

Hipotezy wyężeńiowe - obecnie stosowane

Hipoteza wyężeńiowa to:

zależność algebraiczna, która dla zadanego stanu naprężeń rzeczywistych służy do obliczeń naprężenia zredukowanego σ_{red} jako parametru oceny tego stanu ze względu na wytrzymałość materiału

Pierwszą hipotezę wyężeńiową opracowano w XVII w.
(Galileusz, Leibnitz)

Obecnie stosowane hipotezy:

- hipoteza energii właściwej odkształcenia postaciowego
(Huber, von Mises, Hencky – początek XX w.)
stosowana dla materiałów sprężysto-plastycznych,
- hipoteza największego wydłużenia względnego
(de Saint – Venant, Poncelet – pierwsza połowa XIX w.)
stosowana dla materiałów sprężysto - kruchych.

13

Hipoteza energii właściwej odkształcenia postaciowego (Hubera-Misesa)

Dla płaskiego (dwuosiowego) stanu naprężeń głównych

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \leq k_r$$

σ_1, σ_2 – parametry stanu rzeczywistych naprężeń głównych w materiale sprężysto-plastycznym,

k_r – naprężenie dopuszczalne dla rozciągania materiału sprężysto-plastycznego.

Dla zginania z równoczesnym skręcaniem

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 3\tau_{smax}^2} \leq k_g$$

σ_{gmax} – maksymalne naprężenie od zginania w materiale sprężysto-plastycznym,

τ_{smax} – maksymalne naprężenie od skręcania w materiale sprężysto-plastycznym,

k_g – naprężenie dopuszczalne dla zginania materiału sprężysto-plastycznego.

14

Hipoteza największego wydłużenia względnego (de Saint – Venanta)

Dla płaskiego (dwuosiowego) stanu naprężeń głównych

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \nu\sigma_2 \leq k_r$$

σ_1, σ_2 – parametry stanu rzeczywistych naprężeń głównych w materiale sprężysto-kruchym,

ν – liczba Poissona ,

k_r – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie materiału sprężysto-kruchego.

Dla zginania z równoczesnym skręcaniem

$$\sigma_1 = 0,5(\sigma_{gmax} + \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 4\tau_{smax}^2})$$

$$\sigma_2 = 0,5(\sigma_{gmax} - \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 4\tau_{smax}^2})$$

σ_{gmax} – maksymalne naprężenie od zginania w materiale sprężysto-kruchym,

τ_{smax} – maksymalne naprężenie od skręcania w materiale sprężysto-kruchym.

15

Przykład obliczeniowy nr 3

Sprawdzić warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa pręta stalowego równocześnie zginanego i skręcanego, dla naprężeń: $\sigma_{gmax} = 150$ MPa, $\tau_{smax} = 50$ MPa, $k_g = 180$ MPa.

Rozwiązanie

a. Pręt jest wykonany z materiału sprężysto-plastycznego, stąd do sprawdzenia warunku wytrzymałościowego bezpieczeństwa tego pręta należy zastosować hipotezę wyężeniową Hubera –Missesa.

b. Sprawdzenie warunku wytrzymałościowego bezpieczeństwa:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 3\tau_{smax}^2} = \sqrt{150^2 + 3 \cdot 50^2} = 173,2 \text{ MPa} < k_g = 180 \text{ MPa}$$

Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa jest spełniony

16

Przykład obliczeniowy nr 4

Wspornik wykonany z żeliwa jest równocześnie zginany i skręcany. Sprawdzić warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa wspornika dla naprężeń : $\sigma_{gmax} = 50 \text{ MPa}$, $\tau_{smax} = 30 \text{ MPa}$, $k_r = 60 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie

a. Wspornik jest wykonany z materiału sprężysto-kruchego, stąd do sprawdzenia warunku wytrzymałościowego bezpieczeństwa wspornika należy zastosować hipotezę wyężeniową de Saint-Venanta.

b. Obliczenie naprężenia σ_1 :

$$\sigma_1 = 0,5(\sigma_{gmax} + \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 4\tau_{smax}^2}) = 0,5 \cdot (50 + \sqrt{50^2 + 4 \cdot 30^2}) = 64,1 \text{ MPa}$$

c. Obliczenie naprężenia σ_2 :

$$\sigma_2 = 0,5(\sigma_{gmax} - \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 4\tau_{smax}^2}) = 0,5 \cdot (50 - \sqrt{50^2 + 4 \cdot 30^2}) = -14,1 \text{ MPa}$$

d. Sprawdzenie warunku bezpieczeństwa dla liczby Poissona żeliwa $\nu = 0,27$

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2 = 64,1 - 0,27 \cdot (-14,1) = 67,9 \text{ MPa} > k_r = 60 \text{ MPa}$$

Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa nie jest spełniony

Koniec wprowadzenia nr 6

17