

**Wprowadzenie nr 5* do ćwiczeń z przedmiotu „Wytrzymałość materiałów”
przeznaczone dla studentów II roku studiów dziennych I stopnia w kierunku
„Energetyka” na wydz. Energetyki i Paliw, w semestrze zimowym 2012/2013**

1. Zakres wprowadzenia nr 5

To wprowadzenie dotyczy ćwiczenia, na którym każdy student samodzielnie opracowuje „**Arkusze ćwiczeniowy nr 5**”. Przez opracowanie tego arkusza studenci nabywają umiejętność analizy i oceny energetycznej odkształceń sprężystych materiału z wykorzystaniem podstawowych zależności konstytutywnych nazywanych uogólnionym prawem Hooke’a .

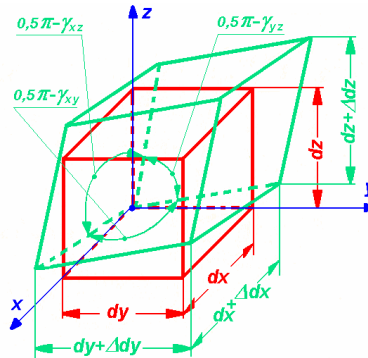
2. Pojęcia podstawowe

•**Odształcenie bryły:** zmiana objętości i postaci bryły wskutek działania sił zewnętrznych.

•**Odształcenie wybranego punktu bryły:** zmiana objętości i postaci elementarnego prostopadłościanu (EP) o początkowych wymiarach dx, dy, dz oraz o początkowych kątach między krawędziami równych $0,5\pi$, wskutek działania naprężeń.

•**Główne założenie stosowane w analizie odkształceń:**

wydłużenia $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ krawędzi EP są wywoływane przez naprężenia normalne, natomiast zmiany $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yx}$ kątów pomiędzy poszczególnymi krawędziami EP – przez naprężenia styczne.



*Autorem wprowadzenia jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH. Wprowadzenie (8 stron) stanowi przedmiot prawa autorskiego określonego w Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. 1994 r. Nr 24 poz.83 z późn. zm.). Autor nie wyraża zgody na inne wykorzystywanie wprowadzenia niż podane w jego przeznaczeniu

Stan odkształcenia i jego parametry (1)

Odształcenia objętościowe:

Wydłużenia względne poszczególnych krawędzi EP definiowane jako:

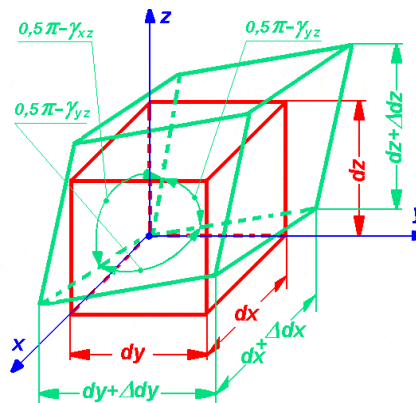
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

Odształcenia objętościowe powodują zmianę objętości EP bez zmiany jego postaci, tzn. odkształcony objętościowo EP pozostaje prostopadłościanem.

Odształcenia postaciowe:

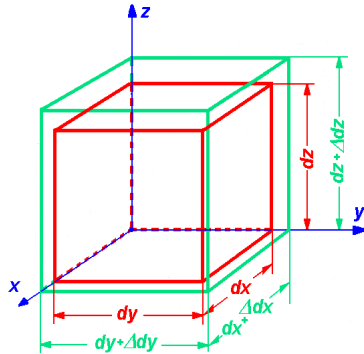
Wartości kątów $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ (w radianach) określające zmianę kształtu ścian EP z prostokątów w równoległoboki, bez zmiany powierzchni tych ścian.

Odształcenia postaciowe zmieniają EP w graniastosłup o równoległych podstawach, ale **objętość** graniastosłupa **pozostaje taka sama** jak nieodkształconego EP.

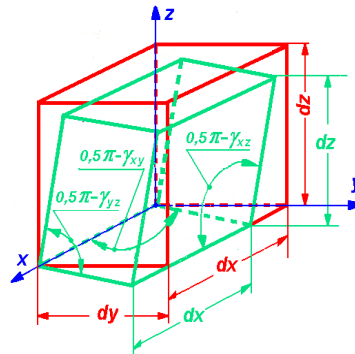


Stan odkształcenia i jego parametry (2)

Elementarny prostopadłościan odkształcony objętościowo



Elementarny prostopadłościan odkształcony postaciowo



3

Zależności pomiędzy parametrami stanu odkształcenia i naprężenia (1)

Uogólnione prawo Hooke'a dla odkształcenia objętościowego

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - parametry stanu odkształcenia objętościowego w analizowanym punkcie bryły, w kierunku naprężeń głównych.

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - naprężenia **główne** w analizowanym punkcie bryły,

E - moduł sprężystości wzdłużnej (Younga) dla materiału bryły,

ν - liczba Poissona dla materiału bryły.

4

Zależności pomiędzy parametrami stanu odkształcenia i naprężenia (2)

Uogólnione prawo Hooke'a
dla odkształcenia postaciowego

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ - parametry stanu odkształcenia postaciowego w analizowanym punkcie bryły,

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ - parametry stanu naprężeń stycznych w analizowanym punkcie bryły,

G - moduł sprężystości postaciowej (Kirchhoffa), MPa, dla materiału bryły, przy czym:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

5

Uwaga

Uogólnione prawo Hooke'a jest zgodne z wynikami empirycznymi dla odkształceń i naprężeń zmieniających się od zera do wartości nazywanych granicami zakresu sprężystego

6

Energia odkształcenia sprężystego

Jest to energia zakumulowana w jednostce objętości materiału wskutek występowania w tym materiale określonego stanu odkształcenia

Energia objętościowego odkształcenia sprężystego

$$\Phi_O = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – naprężenia główne w analizowanej objętości materiału,

E – moduł sprężystości wzdłużnej (Younga) dla materiału,

ν - liczba Poissona dla materiału.

Energia postaciowego odkształcenia sprężystego

$$\Phi_P = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]$$

Całkowita energia odkształcenia sprężystego

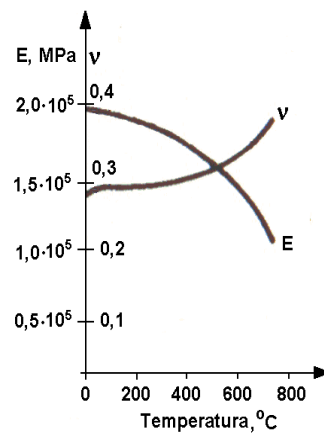
$$\Phi = \Phi_O + \Phi_P$$

7

Parametry własności sprężystych różnych materiałów

| Materiał | Moduł Younga, MPa | Liczba Poissona |
|----------------------------|-------------------------------|-----------------|
| Stal węglowa konstrukcyjna | $2,05 \cdot 10^5$ | 0,24 ÷ 0,30 |
| Stal sprężynowa | $2,11 \cdot 10^5$ | 0,24 ÷ 0,30 |
| Żeliwo | $(1,15 \div 1,60) \cdot 10^5$ | 0,23 ÷ 0,27 |
| Stopy aluminium | $0,72 \cdot 10^5$ | 0,26 ÷ 0,36 |
| Stopy tytanu | $1,12 \cdot 10^5$ | ----- |
| Beton | $(0,18 \div 0,44) \cdot 10^5$ | 0,16 ÷ 0,18 |
| Szkło | $0,6 \cdot 10^5$ | 0,25 ÷ 0,30 |

Wpływ temperatury na własności sprężyste materiałów na przykładzie stali węglowej



8

Kierunki analizowania odkształceń

1. Kierunki osi x, y, z , pokrywające się z kierunkami przyjętymi dla naprężeń w analizowanym punkcie bryły.
2. Kierunki **1, 2, 3** wzajemnie prostopadłe, pokrywające się z kierunkami głównymi stanu naprężenia w analizowanym punkcie bryły.

Odształcenia o kierunkach naprężeń głównych, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ mają nazwę „**odkształcenia główne**”

Przypadki stanów odkształceń

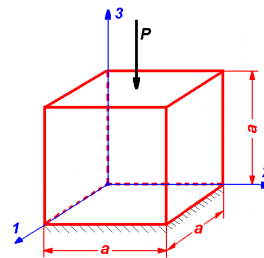
| | |
|--|--|
| Przestrzenny (trójosiowy) stan odkształcenia: | Stan odkształcenia, w którym: $\epsilon_1 \neq 0, \epsilon_2 \neq 0, \epsilon_3 \neq 0$ $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 \geq \epsilon_3$ |
| Płaski (dwuosiowy) stan odkształcenia: | Stan odkształcenia, w którym np.: $\epsilon_3 = 0$ oraz $\epsilon_1 \geq \epsilon_2 > 0$ |
| Jednoosiowy stan odkształcenia: | Stan odkształcenia, w którym np.: $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ oraz $\epsilon_1 > 0$ |

9

Analiza stanu odkształcenia

Przykład obliczeniowy 1

Sześcian o krawędzi a został obciążony siłą P , która w każdym punkcie objętości sześcianu wywołuje jednoosiowy stan naprężeń głównych:



$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -100 \text{ MPa}$$

Obliczyć odkształcenia $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ dla dwu wykonń sześcianu, tj.:

- ze stali konstrukcyjnej, której parametry własności sprężystych mają wartości: $E_s = 2,05 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu_s = 0,26$,
- ze stopu aluminium, którego parametry własności sprężystych są określone jako: $E_A = 0,72 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu_A = 0,26$.

10

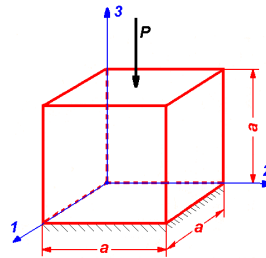
Analiza stanu odkształcenia

Przykład obliczeniowy 1 (c.d.)

Dane dla sześcianu ze stali:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -100 \text{ MPa}$$

$$E_S = 2,05 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \nu_S = 0,26$$



Obliczenia odkształceń $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ dla sześcianu ze stali:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2,05 \cdot 10^5} [0 - 0,26(0 - 100)] = 0,13 \cdot 10^{-3}$$

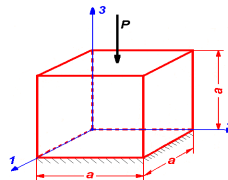
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1}{2,05 \cdot 10^5} [0 - 0,26(0 - 100)] = 0,13 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2,05 \cdot 10^5} [-100 - 0,26(0 + 0)] = -0,49 \cdot 10^{-3}$$

11

Analiza stanu odkształcenia

Przykład obliczeniowy 1 (c.d.)



Wyniki obliczeń

| Materiał sześcianu | Naprężenia i odkształcenia | | | | | |
|--|----------------------------|----------------------|------------|----------------------|------------|------------------------|
| | σ_1 | ε_1 | σ_2 | ε_2 | σ_3 | ε_3 |
| Sześcian ze stali o parametrach $E = 2,05 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ $\nu = 0,26$ | 0 | $0,13 \cdot 10^{-3}$ | 0 | $0,13 \cdot 10^{-3}$ | - 100 MPa | $- 0,49 \cdot 10^{-3}$ |
| Sześcian ze stopu aluminium o parametrach $E = 0,72 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ $\nu = 0,26$ | 0 | $0,37 \cdot 10^{-3}$ | 0 | $0,37 \cdot 10^{-3}$ | - 100 MPa | $- 1,39 \cdot 10^{-3}$ |

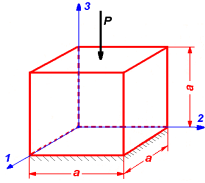
Wniosek

Przy takich samych naprężeniach materiału, jego odkształcenia są tym większe, im mniejszy jest moduł E sprężystości wzdłużnej (moduł Younga) tego materiału

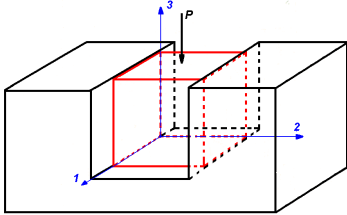
12

Analiza stanu odkształcenia

Przykład obliczeniowy 2



Sześcian pokazany na rysunku pozbawiono możliwości odkształceń w kierunku osi 2, aby spowodować w sześcianie dwuosiowy stan naprężeń. W tym celu umieszczono sześcian w wycięciu sztywnej płyty.



Obliczyć naprężenie σ_2 oraz odkształcenia ε_1 i ε_3 przy założeniu, że $\varepsilon_2 = 0$ oraz że $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -100$ MPa, a sześcian jest wykonany ze stopu aluminium jak przykładzie 1.

Obliczony stan odkształceń i naprężeń sześcianu nieswobodnego (umieszczonego w wycięciu płyty) porównać ze stanem naprężeń i odkształceń obliczonym w przykładzie 1 dla sześcianu swobodnego.

13

Analiza stanu odkształcenia

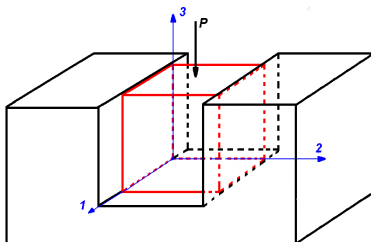
Przykład obliczeniowy 2 (c.d.)

Dane:

$$\sigma_1 = 0, \sigma_3 = -100 \text{ MPa}, \varepsilon_2 = 0$$

$$E = 0,72 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \nu = 0,26$$

Obliczyć: $\sigma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_3$



Równanie do obliczeń i obliczenie naprężenia σ_2 :

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = 0 \Rightarrow \sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3) = 0,26 \cdot (0 - 100) = -26 \text{ MPa}$$

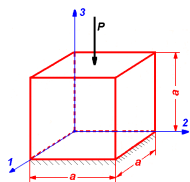
Wzór do obliczeń i obliczenie odkształcenia ε_1 :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{0,72 \cdot 10^5} [0 - 0,26(-26 - 100)] = 0,46 \cdot 10^{-3}$$

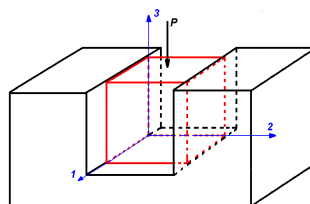
Wzór do obliczeń i obliczenie odkształcenia ε_3 :

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{0,72 \cdot 10^5} [-100 - 0,26(0 - 26)] = -1,31 \cdot 10^{-3}$$

Analiza stanu odkształcenia - przykład obliczeniowy 2 (c.d.)



Wyniki obliczeń



| Sześcian | Naprężenia i odkształcenia | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------|------------|----------------------|------------|-----------------------|
| | σ_1 | ϵ_1 | σ_2 | ϵ_2 | σ_3 | ϵ_3 |
| Swobodny (rys. z lewej strony) | 0 | $0,37 \cdot 10^{-3}$ | 0 | $0,37 \cdot 10^{-3}$ | -100 MPa | $-1,39 \cdot 10^{-3}$ |
| Nieswobodny (rys. z prawej strony) | 0 | $0,46 \cdot 10^{-3}$ | -26 MPa | 0 | -100 MPa | $-1,31 \cdot 10^{-3}$ |

Wniosek

Ograniczenie swobody odkształceń materiału powoduje wzrost naprężeń w materiale tym większy, im większa jest liczba Poissona ν tego materiału.

Koniec wprowadzenia nr 5

15