Wprowadzenie nr 4* do ćwiczeń z przedmiotu „Wytrzymałość materiałów” przeznaczone dla studentów II roku studiów dziennych I stopnia w kierunku „Energetyka” na wydz. Energetyki i Paliw, w semestrze zimowym 2012/2013

1. Zakres wprowadzenia nr 4

To wprowadzenie dotyczy ćwiczenia, na którym każdy student samodzielnie opracowuje **„Arkusz ćwiczeniowy nr 4”.** Przez opracowanie tego arkusza studenci nabywają umiejętność analizy płaskiego stanu naprężenia ze względu na takie parametry tego stanu, jak: naprężenia normalne, naprężenia styczne, naprężenia główne, kąt transformacji stanu naprężeń.

2. Pojęcia podstawowe

2.1. Naprężenie w przekroju pręta jako wielkość fizyczna: *wektor opisujący rozkład obciążenia wewnętrznego w wybranym przekroju płaskim pręta, odniesionego do jednostki tego przekroju.*

2.2. Naprężenie w przekroju pręta jako wielkość matematyczna: *Pochodna funkcji **W(A)** opisującej rozkład obciążenia wewnętrznego **W** na powierzchni **A**, jaką ma wybrany przekrój płaski pręta.*

$$\vec{p} = \frac{d\vec{W}(A)}{dA}$$

2.3. Jednostka naprężenia, podstawowa w układzie SI: *miano* N/m^2*, nazwa* ***Pascal****, symbol* ***Pa****.*

2.4. Jednostka naprężenia, zwykle używana: *miano* $10^6 N/m^2$*, nazwa* ***MegaPascal****, symbol* ***MPa****.*

*Autorem wprowadzenia jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH. Wprowadzenie (6 stron) stanowi przedmiot prawa autorskiego określonego w Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. 1994 r. Nr 24 poz.83 z późn. zm.). Autor nie wyraża zgody na inne wykorzystywanie wprowadzenia niż podane w jego przeznaczeniu

1

3. Składowe naprężeń względem osi układu współrzędnych x, y, z występujące wybranym punkcie przekroju normalnego do osi z

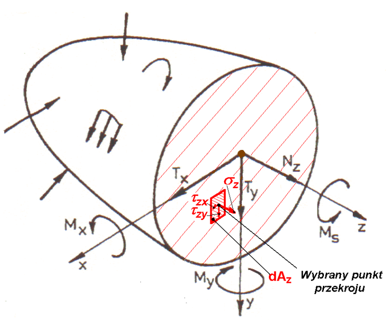
Oznaczanie i nazewnictwo:

σ_z – naprężenie **normalne** tj. prostopadłe do płaszczyzny wybranego przekroju,

τ_{zx}, τ_{zy} – naprężenia **styczne** do płaszczyzny wybranego przekroju.

Symbol naprężenia **normalnego** opatruje się **jednym indeksem** odpowiadającym osi **prostopadłej** do wybranego przekroju.

Symbol naprężenia **stycznego** ma dwa indeksy:



- pierwszy indeks określa **oś prostopadłą** do wybranego przekroju,
- drugi indeks wskazuje **oś kierunku działania** naprężenia.

Dla przekrojów normalnych do osi **x**, **y**, naprężenia normalne będą oznaczonej jako σ_x, σ_y,

a naprężenia styczne, odpowiednio τ_{xy}, τ_{xz} oraz τ_{yx}, τ_{yz}.

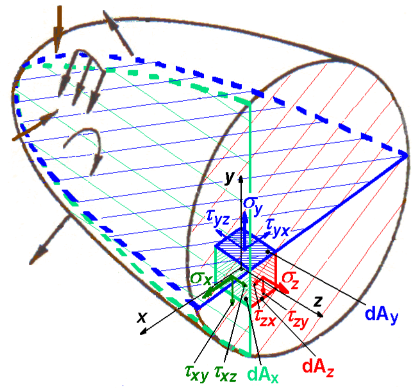
2

4. Stan naprężeń w zadanym punkcie bryły

to w ogólnym przypadku,
zbiór sześciu niezależnych wartości naprężeń w tym punkcie,
nazywanych **parametrami stanu naprężenia,** obejmujących:

trzy naprężenia normalne: σ_x , σ_y , σ_z ,

trzy naprężenia styczne: τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}.

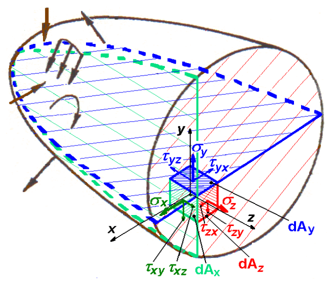


Parametry stanu naprężenia wyznacza się w punkcie bryły wspólnym dla trzech wzajemnie prostopadłych przekrojów płaskich, przedstawionym za pomocą elementarnego sześcianu, który ma osie ***x*** , ***y*** , ***z*** , o wspólnym początku usytuowanym w środku geometrycznym sześcianu oraz ma ściany utworzone z elementarnych powierzchni płaskich:

dA_x , dA_y , dA_z

5. Właściwości stanu naprężenia

5.1.Naprężenia normalne i naprężenia styczne wywołane w analizowanym punkcie bryły przez zadany układ sił zewnętrznych **zmieniają się** wraz ze zmianą kierunków osi **x**, **y**, **z** , które przyjęto dla elementarnych powierzchni dA_x, dA_y, dA_z.



5.2. Dla każdego punktu bryły obciążonej zadanym układem sił zewnętrznych można określić takie kierunki osi **x**, **y**, **z**,

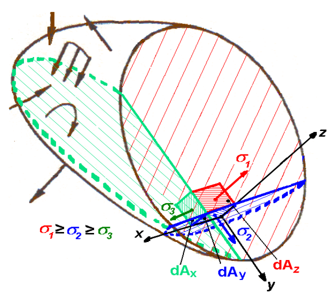
że wszystkie naprężenia styczne w tym punkcie:

τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}

będą równe zero.

W takim przypadku naprężenia normalne noszą nazwę „**naprężenia główne**” i są oznaczane jako:

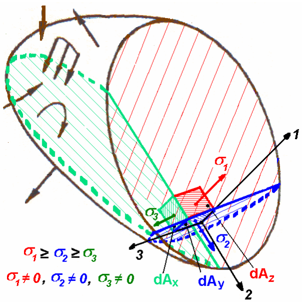
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$,



a kierunki tych naprężeń mają nazwę „**kierunki główne**” i są określane za pomocą wzajemnie prostopadłych osi oznaczanych odpowiednio do naprężeń jako **1**, **2**, **3**.

6. Klasyfikacja stanu naprężenia

Klasyfikację stanu naprężenia przeprowadza się na podstawie **naprężeń głównych**



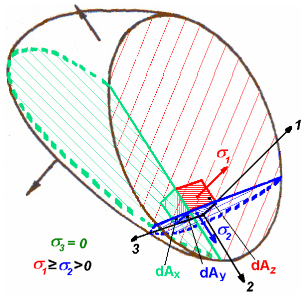
Przestrzenny (trójosiowy) stan naprężenia:

Stan naprężenia, w którym:

$\sigma_1 \neq 0,\ \sigma_2 \neq 0,\ \sigma_3 \neq 0$

przy czym:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$



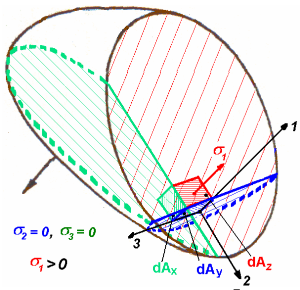
Płaski (dwuosiowy) stan naprężenia:

Stan naprężenia, w którym np. $\sigma_3 = 0$ oraz

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$$

Jednoosiowy stan naprężenia:

Stan naprężenia, w którym np. $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ oraz $\sigma_1 > 0$



5

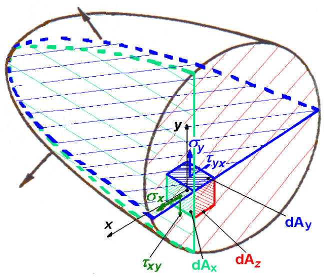
7. Analiza płaskiego stanu naprężenia

Przypadek analizy 1:

Znane są naprężenia normalne σ_x, σ_y oraz naprężenia styczne $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ dla przekroju o kierunku x.

Należy wyznaczyć:

naprężenia główne σ_1 i σ_2 oraz kąt α określający **kierunek główny** ***1*** względem osi x (**kąt transformacji stanu naprężeń σ_x , σ_y , τ_{xy} do stanu naprężeń głównych) .**



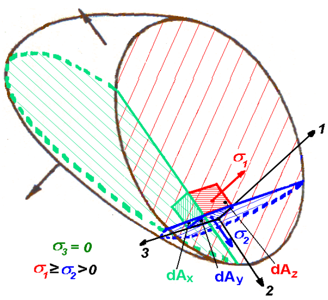
Metody analizy:

- metoda geometryczna, nazywana **„Koło naprężeń Mohra"**.
- metoda algebraiczna, wykorzystująca wzory:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$tg2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



6

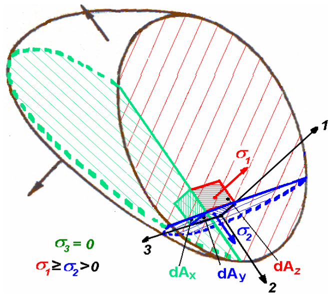
7. Analiza płaskiego stanu naprężenia (c.d.)

Przypadek analizy 2 :

Znane są naprężenia główne σ_1 i σ_2 oraz kąt α określający kierunek główny *1* względem zadanej osi *x*.

Należy wyznaczyć:

naprężenia normalne oraz naprężenia styczne dla przekroju odpowiadającego zadanej osi ***x.***



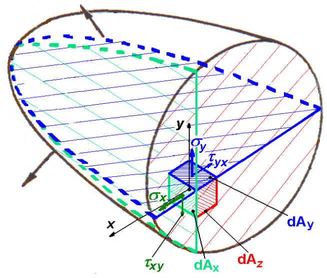
Metody analizy:

- metoda geometryczna, nazywana jako **„Koło naprężeń Mohra”**,
- metoda algebraiczna wykorzystująca zależności:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$



α - kąt określający **kierunek główny *1*** względem zadanej osi ***x***.

7. Analiza płaskiego stanu naprężenia (c.d.)

Przypadek analizy 3:

W analizowanym punkcie bryły znane są naprężenia główne σ_1 i σ_2 oraz położenie osi *1* , *2*.

Należy wyznaczyć:

- **kąt α_τ określający kierunek główny *1* względem osi *x* właściwej dla stanu ekstremalnych naprężeń stycznych,**
- **wartość ekstremalną naprężeń stycznych (maksymalną wartość bezwzględną) .**

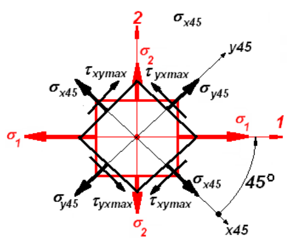
Metody analizy:

- **metoda geometryczna, nazywana jako „Koło naprężeń Mohra”**
- **metoda algebraiczna wykorzystująca zależności:**

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \Rightarrow |\tau_{xy}|_{max}$$

$$gdy \quad \alpha = \alpha_\tau = 45^\circ + n \cdot 90^\circ$$

$$|\tau_{xy}|_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$



7. Analiza płaskiego stanu naprężenia (c.d.)

Przypadek analizy 4: Stan naprężeń określany jako „czyste ścinanie”

Ten stan występuje wtedy, gdy dla kierunków **ekstremalnych** naprężeń stycznych (α_τ **= 45° + n ·90°**) **naprężenia normalne są równe zero**.

Warunki uzyskania płaskiego stanu czystego ścinania

- **występowanie naprężeń normalnych, które dla dowolnego kierunku pozostają względem siebie w relacji**:

$$\sigma_x = -\sigma_y$$

- **transformacja stanu naprężeń z relacją j.w. do stanu ekstremalnych naprężeń stycznych (kąt transformacji:** α **+ 45° + n·90°).**

Naprężenia styczne $|\tau_{xy}|_{max}$ **w stanie czystego ścinania**:

$$|\tau_{xy}|_{max} = |\sigma_1| = |\sigma_2|$$

9

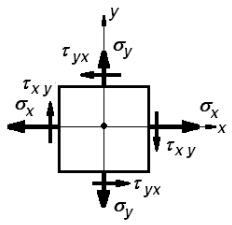
7. Analiza płaskiego stanu naprężenia (c.d.)

Przykład obliczeniowy 1

W zadanym punkcie pręta występuje płaski stan naprężeń:

$$\sigma_x = 150\ MPa\ ,\ \sigma_y = 100\ MPa\ ,\ \tau_{xy} = 50\ MPa\ .$$

Obliczyć naprężenia główne σ_1 **i** σ_2 **, kąt** α **kierunku głównego *1* względem osi *x* oraz przedstawić schemat zmiany kierunków *x* , *y* na kierunki główne *1* , *2*.**



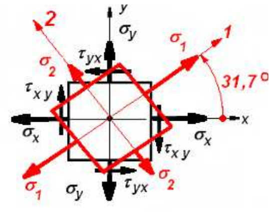
Obliczenia i schemat

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{150+100}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(150-100)^2 + 4\cdot 50} = 180{,}9\ MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{150+100}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(150-100)^2 + 4\cdot 50} = 69{,}1\ MPa$$

$$tg2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}arctg(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y})$$

$$\alpha = \frac{1}{2}arctg(\frac{2\cdot 50}{150-100}) = 31{,}7^\circ$$



10

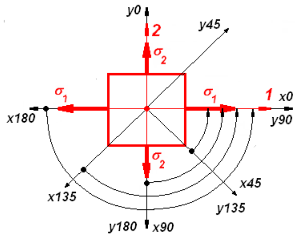
7. Analiza płaskiego stanu naprężenia (c.d.)

Przykład obliczeniowy 2

W analizowanym punkcie pręta występuje płaski stan naprężeń głównych:

$$\sigma_1 = 300\ MPa\ ,\ \sigma_2 = 200\ MPa$$

Obliczyć naprężenia normalne i styczne dla kierunków *x0*, *x45*, *x90*, *x135*, *x180*.



Przykładowe obliczenie naprężeń

$$\sigma_{x45} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} cos(2 \cdot 45^\circ) =$$

$$= \frac{300 + 200}{2} + \frac{300 - 200}{2} cos90^\circ = 250\ MPa$$

$$\sigma_{y45} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} cos(2 \cdot 45^\circ) =$$

$$= \frac{300 + 200}{2} - \frac{300 - 200}{2} cos90^\circ = 250\ MPa$$

$$\tau_{xy45} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} sin(2 \cdot 45^\circ) =$$

$$= \frac{300 - 200}{2} sin(2 \cdot 45^\circ) = 50\ MPa$$

Wyniki obliczeń

Kierunek	σ_x , MPa	σ_y , MPa	τ_{xy} , MPa
x0	*300*	*200*	*0*
x45	*250*	*250*	*50*
x90	*200*	*300*	*0*
x135	*250*	*250*	*-50*
x180	*300*	*200*	*0*

Koniec wprowadzenia nr 4