

**Wprowadzenie nr 3\* do ćwiczeń z przedmiotu „Wytrzymałość materiałów”  
przeznaczone dla studentów II roku studiów dziennych I stopnia w kierunku  
„Energetyka” na wydz. Energetyki i Paliw, w semestrze zimowym 2012/2013**

**1. Zakres wprowadzenia nr 3**

To wprowadzenie dotyczy ćwiczenia, na którym każdy student samodzielnie opracowuje „**Arkusze ćwiczeniowy nr 3**”. Przez opracowanie tego arkusza studenci nabywają umiejętność obliczania dopuszczalnych obciążeń zewnętrznych dla prętów rozciąganych, ściskanych oraz prętów zginanych dla przypadku materiału sprężysto-plastycznego i sprężysto-kruchego.

**2. Pojęcia podstawowe**

2.1. Naprężenie w przekroju pręta jako wielkość fizyczna: *wektor opisujący rozkład obciążenia wewnętrznego w wybranym przekroju płaskim pręta, odniesionego do jednostki tego przekroju.*

2.2. Naprężenie w przekroju pręta jako wielkość matematyczna: *Pochodna funkcji  $\mathbf{W}(\mathbf{A})$  opisującej rozkład obciążenia wewnętrznego  $\mathbf{W}$  na powierzchni  $\mathbf{A}$ , jaką ma wybrany przekrój płaski pręta.*

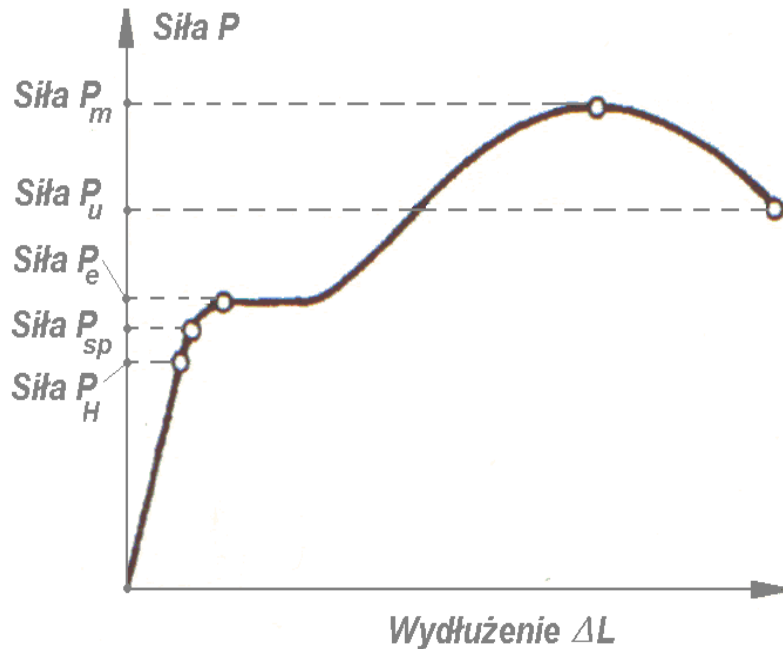
$$\vec{p} = \frac{d\vec{W}(\mathbf{A})}{dA}$$

2.3. Jednostka naprężenia, podstawowa w układzie SI: *miano  $\mathbf{N/m^2}$ , nazwa **Pascal**, symbol **Pa**.*

2.4. Jednostka naprężenia, zwykle używana: *miano  $10^6\mathbf{N/m^2}$ , nazwa **MegaPascal**, symbol **MPa**.*

\*Autorem wprowadzenia jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH. Wprowadzenie (9 stron) stanowi przedmiot prawa autorskiego określonego w Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. 1994 r. Nr 24 poz.83 z późn. zm.). Autor nie wyraża zgody na inne wykorzystywanie wprowadzenia niż podane w jego przeznaczeniu

### 3. Analiza wykresu rozciągania pręta z materiału sprężysto - plastycznego



$P_m$  - siła graniczna ze względu na wytrzymałość materiału pręta na rozciąganie.

$P_u$  - siła graniczna ze względu na zerwanie pręta.

$P_e$  - siła graniczna ze względu na uplastycznienie materiału.

$P_{sp}$  - siła graniczna ze względu na sprężystość materiału.

$P_H$  - siła graniczna ze względu na stosowność prawa Hooke'a.

**Naprężenia w przekroju o powierzchni  $A$  odpowiadające granicznym siłom**

$$\frac{P_H}{A} = R_H - \text{granica proporcjonalności} , \quad \frac{P_{sp}}{A} = R_{sp} - \text{granica sprężystości}$$

$$\frac{P_e}{A} = R_e - \text{granica plastyczności} , \quad \frac{P_m}{A} = R_m - \text{wytrzymałość na rozciąganie}$$

## 4. Charakterystyka materiałów ze względu na przebieg wykresu rozciągania

### Materiały sprężysto - plastyczne:

Materiały, których próbki podczas rozciągania doznają wydłużeń sprężystych i plastycznych – np. stal

### Materiały sprężysto - plastyczne z wyraźną granicą plastyczności:

Materiały, których próbki przy rozciąganiu doznają wydłużeń plastycznych o charakterze **płynięcia materiału** (np. stal konstrukcyjna zwykłej jakości).

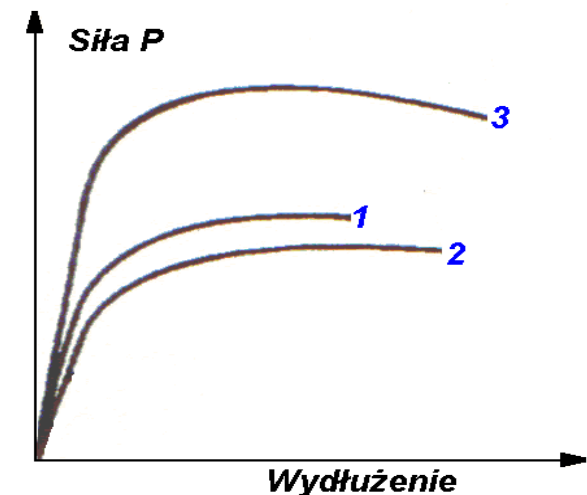
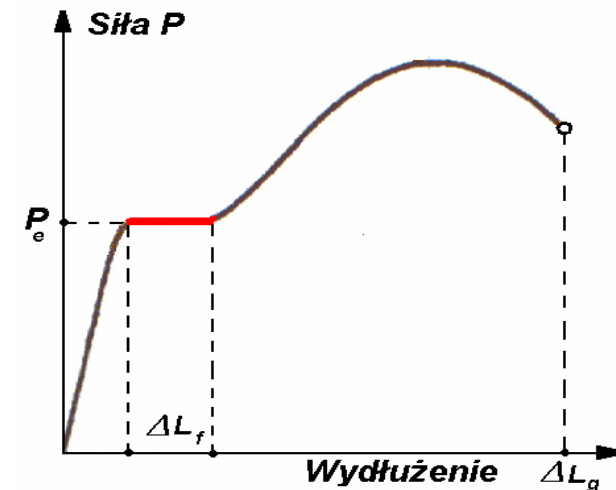
### Materiały sprężysto - plastyczne bez wyraźnej granicy plastyczności:

Materiały, których granicę plastyczności wyznacza się jako takie naprężenie  $R_{0,2}$  w przekroju normalnym próbki, przy którym próbka uległa trwałemu wydłużeniu **0,2%** początkowej długości,

(np. stal konstrukcyjna wyższej jakości - **1**, stopy aluminium - **2**, stopy tytanu - **3**).

### Materiały sprężysto-kruche:

Materiały, których próbki, przy rozciąganiu nie doznają odkształceń plastycznych (nie mają granicy plastyczności) - np. żeliwo.



## 5. Zasady obliczeń wytrzymałościowych na rozciąganie

**Cel obliczeń:** Na przykład obliczyć siłę dopuszczalną  $P_{dop}$  rozciągającą pręt, tj. siłę, która nie spowoduje naprężenia mogącego zniszczyć materiał pręta.

**Naprężenie niszczące na rozciąganie:** Jest to zwykle granica plastyczności materiału  $R_e$ ,

gdyż naprężenie równe granicy plastyczności materiału może spowodować trwałe wydłużenie pręta rozciąganego, uważane zwykle za zniszczenie materiału.

**Naprężenie dopuszczalne na rozciąganie  $k_r$ :** Iloraz naprężenia niszczącego  $R_e$  do współczynnika bezpieczeństwa  $n$ , obliczany ze wzoru:

$$k_r = \frac{R_e}{n}$$

### Współczynnik bezpieczeństwa:

Liczba uwzględniająca szacunkowy stopień błędu obliczeń wytrzymałościowych, możliwy do popełnienia z powodu:

- nieznanomości rzeczywistych obciążeń (czynniki losowe),
- uproszczeń w metodach obliczania naprężeń,
- ewentualnych wad materiału.

## 6. Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa pręta rozciąganego

**Definicja opisowa:**

**Naprężenie rozciągające w każdym przekroju poprzecznym pręta nie może być większe od naprężenia dopuszczalnego**

**Definicja matematyczna:**

$$\sigma_r = \frac{P_{dop}}{A} = k_r = \frac{R_e}{n}$$

$\sigma_r$  – naprężenie rozciągające,

$P_{dop}$  – dopuszczalna siła rozciągająca pręt,

$A$  – powierzchnia poprzecznego przekroju pręta,

$k_r$  – naprężenie dopuszczalne dla materiału pręta,

$R_e$  – granica plastyczności materiału pręta jako naprężenie niszczące,

$n$  – współczynnik bezpieczeństwa.

## 7. Przykład obliczeniowy nr 1

Pręt okrągły o średnicy  $D = 20$  mm jest wykonany ze stali o granicy plastyczności  $R_e = 350$  MPa. Obliczyć siłę dopuszczalną dla rozciągania tego pręta, jeżeli ma być zachowany współczynnik bezpieczeństwa  $n = 2$ .

### Odpowiedź opisowa:

Będzie to siła, która wywoła w przekrojach pręta naprężenie równe granicy plastyczności materiału podzielonej przez współczynnik bezpieczeństwa.

### Odpowiedź obliczeniowa:

$$\sigma_r = \frac{P_{dop}}{A} = \frac{R_e}{n} \Rightarrow P_{dop} = \frac{R_e}{n} \cdot A = \frac{R_e}{n} \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4}$$

$$P_{dop} = \frac{350 \cdot 10^6}{2} \cdot \frac{3,14 \cdot (20 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 54,95 \cdot 10^3 \text{ N} = 54,95 \text{ kN}$$

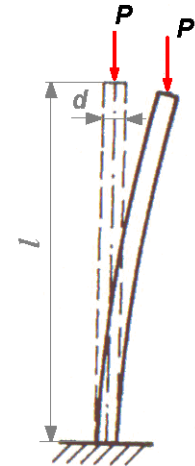
**Uwaga:** zaleca się, aby poszczególne parametry podstawiane do wzorów obliczeniowych były wyrażone w podstawowych jednostkach układu SI.

## 8. Zasady obliczeń wytrzymałościowych na ściskanie

**Cel** Na przykład obliczyć, jaką wartość może osiągnąć siła **P**  
**obliczeń:** ściskająca pręt, bez obawy o zniszczenie pręta.

**Siła P ściskająca pręt może go zniszczyć z dwu powodów:**

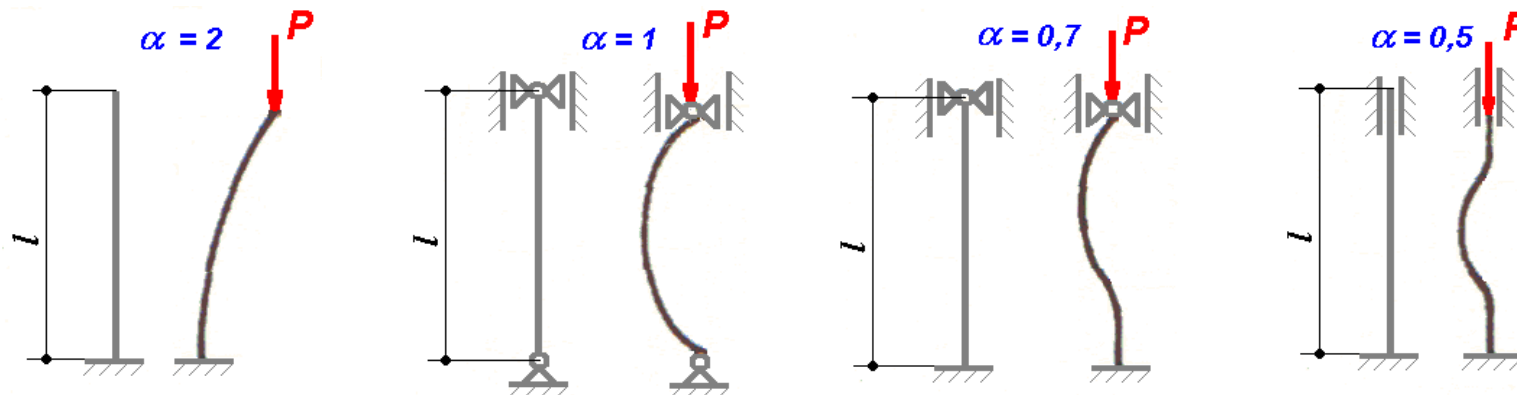
1. Gdy naprężenie ściskające spowodowane przez siłę osiągnie poziom naprężenia niszczącego, tj. wytrzymałości materiału na ściskanie **R<sub>C</sub>**,
2. Gdy siła ściskająca wywoła wyboczenie pręta, tj. trwałe zakrzywienie.



O tym, czy występuje przypadek **1** lub **2** informuje parametr **λ** nazywany **smukłością**, obliczany jako:

$$\lambda = \frac{l \cdot \alpha}{i_{min}}$$

**l** – długość pręta, **i<sub>min</sub>** – minimalny promień bezwładności przekroju pręta,  
**α** – współczynnik dobierany w zależności od więzów nałożonych na końce pręta:



## 8. Zasady obliczeń wytrzymałościowych na ściskanie (c.d.)

Dopuszczalną siłę ściskającą pręt  $P_{sdop}$  oblicza się ze względu na wytrzymałość materiału na ściskanie, gdy smukłość  $\lambda$  pręta jest mała i nie przekracza dolnej wartości  $\lambda_0$  zakresu wyboczeniowego (dla stali  $\lambda_0 = 20$ ).

**Wzór obliczeniowy:**  $P_{sdop} = \frac{R_c}{n} \cdot A$ , gdzie:

$R_c$  – wytrzymałość materiału pręta na ściskanie,

$n$  – współczynnik bezpieczeństwa,  $A$  – powierzchnia poprzecznego przekroju pręta.

**W innym przypadku dopuszczalną siłę ściskającą pręt oblicza się ze względu na wyboczenie, do czego, zależnie od wartości  $\lambda$  stosuje się wzory:**

1. Gdy  $\lambda_0 < \lambda \leq \lambda_{gr}$ , to  $P_{sdop} = \frac{a - b\lambda}{n} \cdot A$ , (wg wzoru Tetmajera - Jasińskiego)

2. Gdy  $\lambda > \lambda_{gr}$ , to  $P_{sdop} = 9,86 \frac{E}{\lambda^2 \cdot n} \cdot A$ , (wg wzoru Eulera) gdzie:

$\lambda_{gr}$  – tzw. smukłość graniczna (np. dla stali zwykłej jakości  $\lambda_{gr} \approx 100$ ),

$a, b$  – stałe materiałowe wyznaczone doświadczalnie (np. dla stali zwykłej jakości:  $a = 310 \text{ MPa}$ ,  $b = 15,5 \text{ MPa} - 0,05R_c [\text{MPa}]$ ).

$E$  – moduł sprężystości wzdłużnej materiału pręta (dla stali  $2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ ) <sup>8</sup>

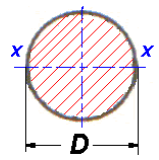
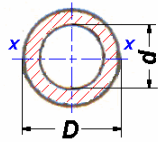
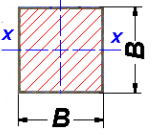
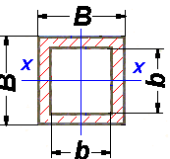
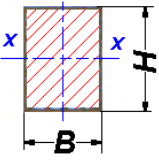
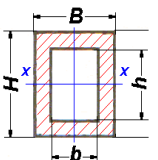


## 9. Wzory do obliczeń minimalnego promienia bezwładności $i_{min}$ dla niektórych przekrojów prętów

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$$

$J_{min}$  – minimalny moment osiowy bezwładności przekroju,

$A$  – powierzchnia poprzecznego przekroju pręta.

Przekrój pełny	Minimalny moment osiowy bezwładności oraz minimalny promień bezwładności przekroju		Przekrój rurowy	Minimalny moment osiowy bezwładności oraz minimalny promień bezwładności przekroju	
	$J_{min} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$	$i_{min} = \frac{D}{4}$		$J_{min} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$i_{min} = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}$
	$J_{min} = \frac{B^4}{12}$	$i_{min} = \frac{B}{3,5}$		$J_{min} = \frac{B^4 - b^4}{12}$	$i_{min} = \frac{\sqrt{B^2 + b^2}}{3,5}$
	$J_{min} = \frac{B^3 H}{12}$	$i_{min} = \frac{B}{3,5}$		$J_{min} = \frac{B^3 H - b^3 h}{12}$	$i_{min} = \sqrt{\frac{B^3 H - b^3 h}{12(BH - bh)}}$

## 10. Przykład obliczeniowy nr 2

Pręt okrągły o średnicy  $D = 20$  mm jest wykonany ze stali zwykłej jakości, o granicy plastyczności  $R_e = 280$  MPa. Obliczyć siłę dopuszczalną dla ściskania pręta ze współczynnikiem bezpieczeństwa  $n = 2$ , jeżeli wytrzymałość materiału na ściskanie  $R_c$  jest równa  $R_e$ , a współczynnik więzów  $\alpha = 1$ . Siłę obliczyć dla trzech długości pręta:  $l_1 = 8$  cm,  $l_2 = 30$  cm,  $l_3 = 60$  cm, i porównać z siłą dopuszczalną dla rozciągania tego pręta.

### Obliczenia:

Minimalny promień bezwładności przekroju pręta:

$$i_{min} = \frac{D}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ mm}$$

Powierzchnia przekroju pręta:

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} = 314 \text{ mm}^2$$

Smukłość pręta:

$$\lambda(l_1) = \frac{l_1 \cdot \alpha}{i_{min}} = \frac{8 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{5 \cdot 10^{-3}} = 16 < \lambda_0 = 20,$$

$$\lambda(l_2) = \frac{l_2 \cdot \alpha}{i_{min}} = \frac{30 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{5 \cdot 10^{-3}} = 60 < \lambda_{gr} = 100$$

$$\lambda(l_3) = \frac{l_3 \cdot \alpha}{i_{min}} = \frac{60 \cdot 10^{-2} \cdot 1}{5 \cdot 10^{-3}} = 120 > \lambda_{gr} = 100$$

Dopuszczalna siła ściskająca:

$$P_{dop}(l_1) = \frac{R_c}{n} \cdot A = \frac{350 \cdot 10^6}{2} \cdot 314 \cdot 10^{-6} = 54,95 \cdot 10^3 \text{ N} = 54,95 \text{ kN}$$

$$P_{dop}(l_2) = \frac{a - b \cdot \lambda(l_2)}{n} \cdot A = \frac{310 \cdot 10^6 - (15,5 \cdot 10^6 - 0,05 \cdot 280 \cdot 10^6) \cdot 60}{2} \cdot 314 \cdot 10^{-6} = 34,54 \cdot 10^3 \text{ N} = 34,54 \text{ kN}$$

$$P_{dop}(l_3) = 9,86 \frac{E}{[\lambda(l_3)]^2 \cdot n} \cdot A = 9,86 \frac{2,1 \cdot 10^{11}}{120^2 \cdot 2} \cdot 314 \cdot 10^{-6} = 22,58 \cdot 10^3 \text{ N} = 22,58 \text{ kN}$$

## 10. Przykład obliczeniowy nr 2 (c.d.)

Porównanie sił dopuszczalnych ściskających i rozciągających dla pręta o takim samym przekroju

Długość pręta	8 cm	30 cm	60 cm
Dopuszczalna siła ściskająca	54,95 kN	37,93 kN	22,58 kN
Dopuszczalna siła rozciągająca	54,95 kN	54,95 kN	54,95 kN

**Dopuszczalna siła ściskająca dla pręta może być**  
**- zależnie od długości tego pręta -**  
**znacznie mniejsza**  
**od jego dopuszczalnej siły rozciągającej**

# 11. Zginanie prętów prostych

## Definicja

**Przypadek sił zewnętrznych, wywołujący w przekroju pręta prostego dwa rodzaje sił wewnętrznych:**

- **moment zginający** , który działa w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju,
- **siłę tnącą** , która działa stycznie do płaszczyzny przekroju.

## **Przypadki techniczne zginania prętów prostych – belki**

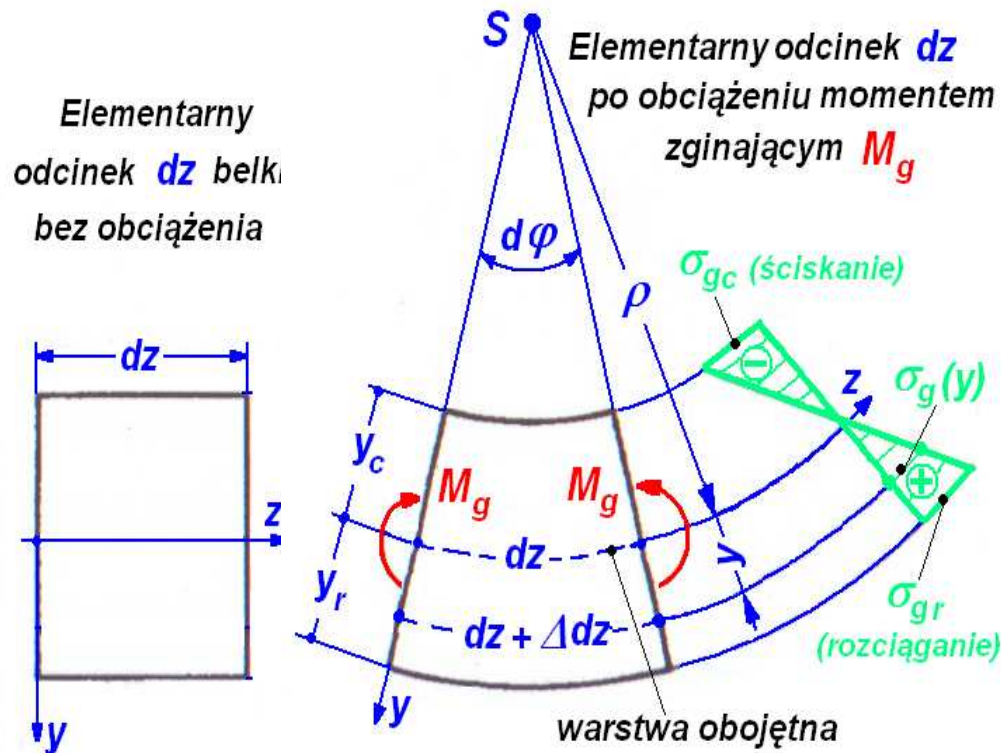
### **Belka, to:**

**pręt z więzami, zwykle prosty, obciążony czynnymi siłami i momentami o wektorach działających prostopadle do osi wzdłużnej pręta ,**

które w przekrojach tego pręta wywołują siły wewnętrzne

**o dominującym udziale momentu zginającego.**

## 12. Obliczanie naprężeń wywołanych przez moment zginający



**Moment zginający  $M_g$  działający w płaszczyźnie  $yz$  powoduje, że:**

- Skrajne powierzchnie prostopadłe do osi  $y$  zmieniają się z powierzchni **płaskich** w powierzchni **walcowe** o wspólnej osi  $S$  prostopadłej do osi  $y$ .
- Przekroje płaskie poprzeczne, prostopadłe do osi  $z$ , obracają się względem osi tworzących powierzchnię walcową nazywaną **warstwą obojętną**.
- Następuje podział każdego przekroju poprzecznego na **strefę ściskania** oraz **strefę rozciągania**, które są przedzielone **osią obojętną**.

- W każdym przekroju poprzecznym powstaje jednoosiowy stan naprężeń o liniowym rozkładzie wzdłuż osi  $y$  opisanym jako:

$$\sigma_g(y) = E \cdot \frac{\Delta dz(y)}{dz} = \frac{E}{\rho} \cdot y = \frac{M_g}{J_x} \cdot y$$

$$\sigma_{gc} = \frac{M_g}{J_x} y_c, \quad \sigma_{gr} = \frac{M_g}{J_x} y_r$$

$\rho$  – promień krzywizny elementarnego odcinka wywołanej przez moment zginający  $M_g$ ,

$J_x$  – moment bezwładności przekroju poprzecznego względem osi obojętnej tego przekroju,

$y_c, y_r$  – współrzędne skrajnych powierzchni elementarnego odcinka. 13

### 13. Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa na zginanie belki wykonanej z materiału sprężysto-plastycznego

W przypadku materiałów sprężysto- plastycznych, **charakteryzujących się jednakową wytrzymałością na rozciąganie i ściskanie**, o bezpieczeństwie belki zginanej decyduje to naprężenie, które jest **największe co do bezwzględnej wartości**.

Takie naprężenie występuje w tzw. **przekroju niebezpiecznym belki**, **w punkcie najbardziej oddalonym od osi obojętnej tego przekroju**.

**Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa na zginanie - postać analityczna:**

$$\sigma_g = \left| M_g \right| \cdot \frac{|y|_{max}}{J_x} \leq k_g$$

**Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa na zginanie - postać praktyczna:**

$$\sigma_g = \frac{|M_g|}{W_x} \leq k_g$$

$M_g$  – moment zginający w przekroju niebezpiecznym belki,

$|y|_{max}$  – największa odległość w przekroju niebezpiecznym od jego osi obojętnej,

$J_x$  – moment bezwładności przekroju względem jego osi obojętnej,

$k_g$  – naprężenie dopuszczalne materiału na zginanie,

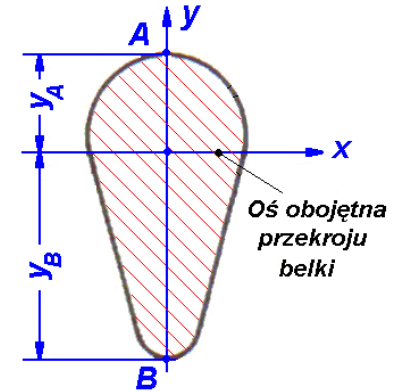
$W_x$  – wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie:

$$W_x = \frac{J_x}{|y|_{max}}$$

## 14. Przykład obliczeniowy nr 3

Belka z materiału sprężysto-plastycznego ma schemat obliczeniowy przekroju pokazany na rysunku. Obliczyć dla tego przekroju wskaźnik wytrzymałości  $W_x$  na zginanie oraz dopuszczalny moment zginający dodatni i ujemny, jeżeli:

$$J_x = 25\text{cm}^4, y_A = 20\text{ mm}, y_B = -50\text{ mm}, k_g = 170\text{ MPa}.$$



**Uwaga :** Moment zginający dodatni wywołuje naprężenia ściskające nad osią obojętną przekroju belki, a naprężenia rozciągające – pod tą osią. Moment zginający ujemny wywołuje przeciwne usytuowanie naprężeń rozciągających i ściskających w przekroju belki.

**Wskaźnik wytrzymałości przekroju belki na zginanie :**

$$W_x = \frac{J_x}{|y|_{max}} = \frac{J_x}{|y_B|} = \frac{25 \cdot (10^{-2})^4}{50 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

**Dopuszczalny moment zginający dodatni:**

$$M_{gdop+} = k_g \cdot W_x = 170 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 850 \text{ Nm} = 0,85 \text{ kNm}$$

**Dopuszczalny moment zginający ujemny:**

$$M_{gdop-} = -k_g \cdot W_x = -170 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = -850 \text{ Nm} = -0,85 \text{ kNm}$$

## 15. Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa na zginanie belki wykonanej z materiału sprężysto-kruchego

W przypadku materiałów sprężysto-kruchych, które charakteryzują się różną wytrzymałością na rozciąganie i ściskanie, o bezpieczeństwie belki zginanej może decydować naprężenie, które **nie jest największe co do bezwzględnej wartości.**

W przypadku takiej belki, w jej przekroju niebezpiecznym należy sprawdzić **naprężenie zginające zarówno w strefie ściskania jak i rozciągania**

**Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa dla strefy ściskania przekroju:**

$$\sigma_g = |\sigma_{gc}| = |M_g| \cdot \frac{|y_c|_{max}}{J_x} \leq k_c$$

**Warunek wytrzymałościowy bezpieczeństwa dla strefy rozciągania przekroju:**

$$\sigma_g = \sigma_{gr} = |M_g| \cdot \frac{|y_r|_{max}}{J_x} \leq k_r$$

$|y_c|_{max}$  – największa odległość w strefie ściskania przekroju niebezpiecznego od jego osi obojętnej,

$k_c$  – naprężenie dopuszczalne materiału belki na ściskanie,

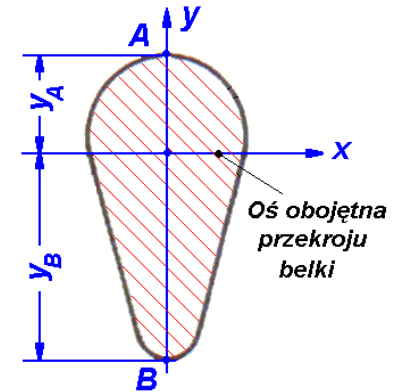
$|y_r|_{max}$  – największa odległość w strefie rozciągania przekroju niebezpiecznego od jego osi obojętnej

$k_r$  – naprężenie dopuszczalne materiału belki na rozciąganie.



## 16. Przykład obliczeniowy nr 5

Belka z materiału sprężysto-kruchego ma schemat obliczeniowy przekroju pokazany na rysunku. Obliczyć dla tego przekroju dopuszczalny moment zginający dodatni i ujemny, jeżeli  $J_x=25 \text{ cm}^4$ ,  $y_A=20 \text{ mm}$ ,  $y_B=-50 \text{ mm}$ ,  $k_c=170 \text{ MPa}$ ,  $k_r=60 \text{ MPa}$ .



Moment zginający dodatni, wywołujący w przekroju belki dopuszczalne naprężenie ściskające  $k_c$

$$M_{gc+} = k_c \cdot \frac{J_x}{y_A} = 170 \cdot 10^6 \cdot \frac{25 \cdot (10^{-2})^4}{20 \cdot 10^{-3}} = 2125 \text{ Nm} = 2,125 \text{ kNm}$$

Moment zginający dodatni, wywołujący w przekroju belki dopuszczalne naprężenie rozciągające  $k_r$

$$M_{gr+} = k_r \cdot \frac{J_x}{|y_B|} = 60 \cdot 10^6 \cdot \frac{25 \cdot (10^{-2})^4}{50 \cdot 10^{-3}} = 300 \text{ Nm} = 0,3 \text{ kNm}$$

Moment zginający ujemny, który wywołuje w przekroju belki dopuszczalne naprężenie ściskające  $k_c$

$$M_{gc-} = -k_c \cdot \frac{J_x}{y_A} = -170 \cdot 10^6 \cdot \frac{25 \cdot (10^{-2})^4}{50 \cdot 10^{-3}} = -850 \text{ Nm} = -0,85 \text{ kNm}$$

Moment zginający ujemny, wywołujący w przekroju belki dopuszczalne naprężenie rozciągające  $k_r$

$$M_{gr-} = -k_r \cdot \frac{J_x}{|y_B|} = -60 \cdot 10^6 \cdot \frac{25 \cdot (10^{-2})^4}{20 \cdot 10^{-3}} = -750 \text{ Nm} = -0,75 \text{ kNm}$$

Moment dopuszczalny dodatni:  $M_{gdop+} = M_{gr+} = 0,3 \text{ kNm}$

Moment dopuszczalny ujemny:  $M_{gdop-} = M_{gr-} = 0,75 \text{ kNm}$

(Koniec wprowadzenia nr 3)