

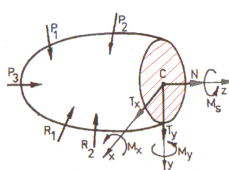
**Wprowadzenie nr 2\* do ćwiczeń z przedmiotu „Wytrzymałość materiałów” dla studentów II roku studiów dziennych I stopnia w kierunku „Energetyka” na wydz. Energetyki i Paliw w semestrze zimowym 2012/2013**

**1. Zakres wprowadzenia nr 2**

To wprowadzenie dotyczy ćwiczenia, na którym każdy student samodzielnie opracowuje „**Arkusze ćwiczeniowy 2a**” lub „**Arkusze ćwiczeniowy 2b**”. Prze opracowanie tych arkuszy studenci nabywają umiejętność obliczania obciążeń wewnętrznych elementów mechanicznych nazywanych belkami.

**2. Pojęcia podstawowe z zakresu obciążeń wewnętrznych belek**

2.1. Obciążenia wewnętrzne, to w ogólnym przypadku układ środkowy trzech sił  $N, T_x, T_y$  oraz układ środkowy trzech momentów  $M_x, M_y, M_s$  przypisanych do przekroju elementu mechanicznego poddawanego analizie wytrzymałościowej.



$P_1, P_2, P_3$  – obciążenia zewnętrzne czynne elementu mechanicznego,  
 $R_1, R_2, R_3$  – obciążenia zewnętrzne bierne od sił reakcji więzów,  
 $N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_s$  – obciążenia wewnętrzne elementu przypisane do analizowanego przekroju tego elementu nazywane jako:

$N$  – siła rozciągająca,  $T_x, T_y$  – siły tnące,

$M_x, M_y$  – momenty zginające,  $M_s$  – moment skręcający.

\*Autorem wprowadzenia jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH. Wprowadzenie (9 stron) stanowi przedmiot prawa autorskiego określonego w Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. 1994 r. Nr 24 poz.83 z późn. zm.). Autor nie wyraża zgody na inne wykorzystywanie wprowadzenia niż podane w jego przeznaczeniu

**Założenia przyjmowane przy obliczaniu obciążeń wewnętrznych belek**

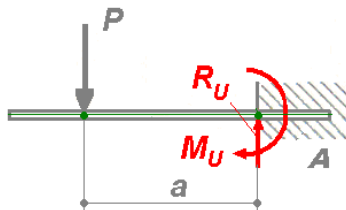
1. Obciążenia zewnętrzne belki wywołują w każdym przekroju tej belki - prostopadłym do jej osi wzdłużnej - **dwa rodzaje obciążeń wewnętrznych:**

- **siłę tnącą** działającą stycznie do płaszczyzny przekroju,
- **moment zginający** działający w płaszczyźnie prostopadłej do przekroju,

2. Wyniki obliczeń obciążeń wewnętrznych przedstawia się w formie dwu wykresów, z których jeden wykres pokazuje **rozkład siły tnącej** wzdłuż długości belki, a drugi wykres pokazuje **rozkład momentu zginającego** wzdłuż tej długości.

### Schematy obliczeniowe belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym

#### 1. Belka jednostronnie utwierdzona, obciążona jedną siłą czynną



Obciążenie czynne belki: siła  $P$

Więzy: uchwyt z utwierdzeniem

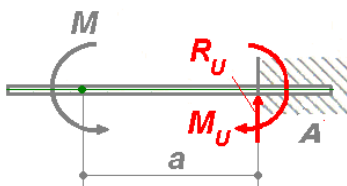
$$R_U = P, \quad M_U = P \cdot a$$

#### Uwagi:

- Siła reakcji  $R_U$  oraz moment utwierdzenia  $M_U$  są  **dodatnie**, gdy ich rzeczywiste zwroty działania są takie, jak na schemacie belki. W innym przypadku siła reakcji  $R_U$  oraz moment utwierdzenia  $M_U$  są **ujemne**.
- W odległości  $a$  uwzględnia się połowę długości utwierdzenia.

### Schematy obliczeniowe belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym (c.d.)

#### 2. Belka jednostronnie utwierdzona, obciążona jednym momentem czynnym



Obciążenie czynne belki: moment  $M$

Więzy: uchwyt z utwierdzeniem

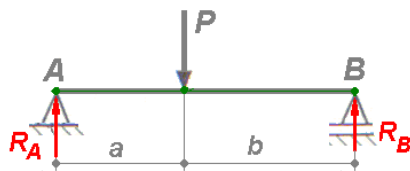
$$R_U = 0, \quad M_U = M$$

#### Uwagi:

- Moment utwierdzenia  $M_U$  jest  **dodatni**, gdy jego rzeczywisty zwrot działania jest taki, jak na schemacie belki. W innym przypadku moment utwierdzenia  $M_U$  jest **ujemny**.
- W odległości  $a$  uwzględnia się połowę długości utwierdzenia.

### Schematy obliczeniowe belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym (c.d.)

#### 3. Belka swobodnie podparta, obciążona jedną siłą czynną



Obciążenie czynne belki: siła  $P$

Więzy belki:

A – podpora nieprzesuwna z przegubem

B – podpora przesuwna bez tarcia

$$R_A = P \frac{b}{a+b}, \quad R_B = P \frac{a}{a+b}$$

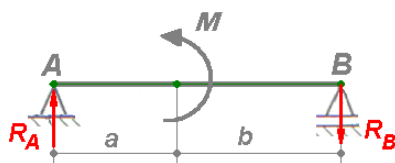
**Uwaga:**

Siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są dodatnie, gdy ich rzeczywiste zwroty działania są takie, jak na schemacie belki.

W innym przypadku siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są ujemne.

### Schematy obliczeniowe belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym (c.d.)

#### 4. Belka swobodnie podparta, obciążona jednym momentem czynnym działającym między podporami



Obciążenie czynne belki: moment  $M$

Więzy belki:

A – podpora nieprzesuwna z przegubem

B – podpora przesuwna bez tarcia

$$R_A = R_B = \frac{M}{a+b}$$

**Uwaga:**

Siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są dodatnie, gdy ich rzeczywiste zwroty działania są takie, jak na schemacie belki.

W innym przypadku siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są ujemne.

## Schematy obliczeniowe belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym (c.d.)

### 5. Belka swobodnie podparta, obciążona jednym momentem czynnym działającym na podporze



**Obciążenie czynne belki:** moment  $M$

**Więzy belki:**

**A** – podpora nieprzesuwana z przegubem

**B** – podpora przesuwana bez tarcia

$$R_A = R_B = \frac{M}{a}$$

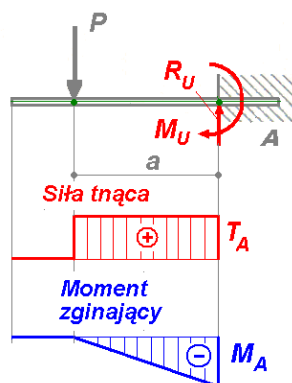
**Uwaga:**

Siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są  **dodatnie**, gdy ich rzeczywiste zwroty działania są takie, jak na schemacie belki.

W innym przypadku siły reakcji  $R_A$ ,  $R_B$  są **ujemne**.

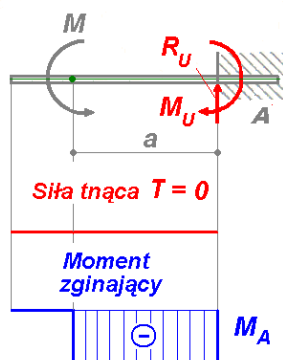
## Siły wewnętrzne belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym

### 1. Belka jednostronnie utwierdzona, obciążona jedną siłą czynną



$$T_A = P, \quad M_A = -P \cdot a$$

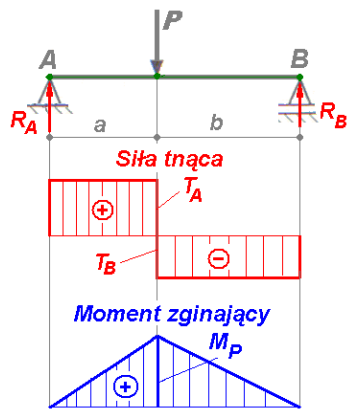
### 2. Belka jednostronnie utwierdzona, obciążona jednym momentem czynnym



$$T = 0, \quad M_A = -M$$

### Siły wewnętrzne belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym (c.d.)

3. Belka swobodnie podparta, obciążona jedną siłą czynną



$T_A$  - siła tnąca w przekroju belki pod siłą  $P$ , rozpatrywanym po stronie podpory  $A$ ,

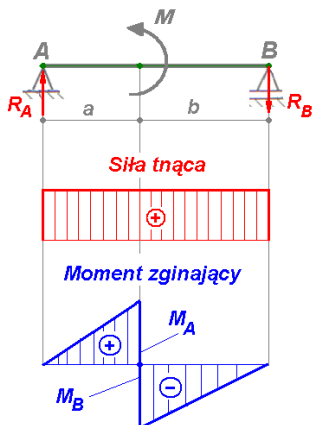
$T_B$  - siła tnąca w przekroju belki pod siłą  $P$ , rozpatrywanym po stronie podpory  $B$ ,

$M_P$  - moment zginający w przekroju belki pod siłą  $P$ , taki sam dla przekroju rozpatrywanego po stronie podpory  $A$ , jak i po stronie podpory  $B$ .

$$T_A = P \frac{b}{a+b} \quad , \quad T_B = -P \frac{a}{a+b} \quad , \quad M_P = P \frac{a \cdot b}{a+b}$$

### Siły wewnętrzne belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym (c.d.)

4. Belka swobodnie podparta, obciążona jednym momentem czynnym działającym między podporami



$T_M$  - siła tnąca w przekroju działania momentu  $M$ , taka sama dla przekroju rozpatrywanego po stronie podpory  $A$ , jak i po stronie podpory  $B$ ,

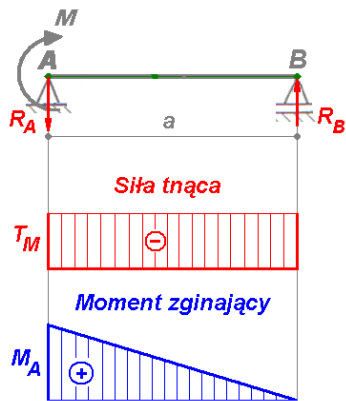
$M_A$  - moment zginający w przekroju działania momentu  $M$ , rozpatrywanym po stronie podpory  $A$ ,

$M_B$  - moment zginający w przekroju działania momentu  $M$ , rozpatrywanym po stronie podpory  $B$ .

$$T_M = \frac{M}{a+b} \quad , \quad M_A = M \frac{a}{a+b} \quad , \quad M_B = -M \frac{b}{a+b}$$

## Siły wewnętrzne belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym (c.d.)

5. Belka swobodnie podparta, obciążona jednym momentem czynnym działającym na podporze



$T_M$  - siła tnąca w przekroju działania momentu  $M$ , taka sama dla każdego przekroju belki prostopadłego do jej osi wzdłużnej ,

$$T_M = -\frac{M}{a}$$

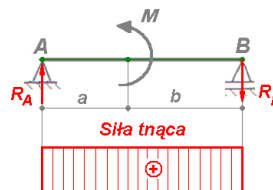
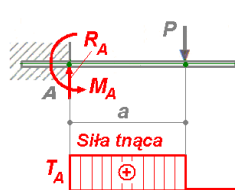
$M_A$  - moment zginający w przekroju działania momentu  $M$

$$M_A = M$$

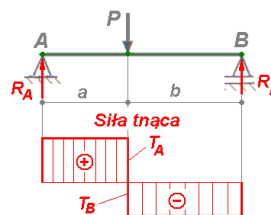
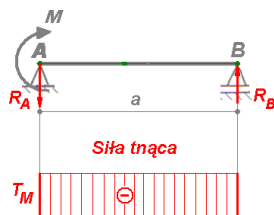
## Zasady określania znaku dla siły tnącej

Siła tnąca w analizowanym przekroju jest :

- **dodatnia** - jeżeli siła zewnętrzna po **lewej** stronie przekroju ma zwrot do **góry**, a siła zewnętrzna po **prawej** stronie tego przekroju ma zwrot **w dół**,



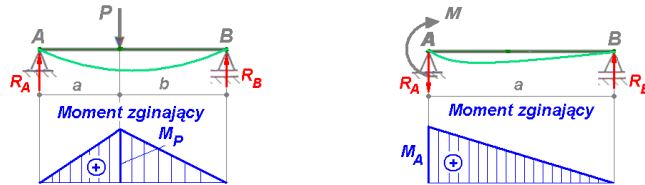
- **ujemna** - gdy jest odwrotnie.



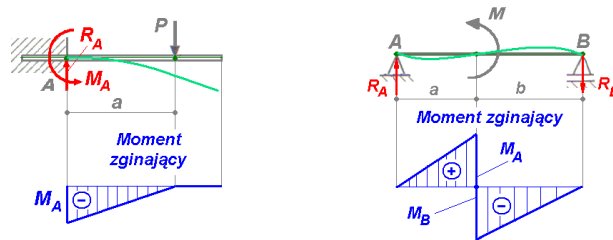
## Zasady określania znaku dla momentu zginającego

Moment zginający w analizowanym przekroju jest :

- dodatni - gdy wygina belkę **wypukłością w dół**,



- ujemny – gdy wygina belkę **wypukłością w górę**.



## Obliczanie sił wewnętrznych belek z niepojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym, z zastosowaniem metody superpozycji (1)

### 1. Założenia

- 1) Obliczanie sił wewnętrznych takich belek ogranicza się zwykle do momentów zginających.
- 2) Dla każdego obciążenia czynnego przyjmuje się schemat obliczeniowy belki zawierający tylko to obciążenie czynne, po czym dla tego schematu sporządza się wykres momentów zginających.
- 3) Moment zginający każdego przekroju belki z niepojedynczym obciążeniem czynnym jest sumą momentów zginających obliczonych dla tego przekroju za pomocą schematów obliczeniowych przyjętych dla pojedynczych obciążeń czynnych belki.

**Obliczanie sił wewnętrznych belek z niepojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym, z zastosowaniem metody superpozycji (2)**

**2. Przykład obliczeniowy dla belki z siłą czynną oraz momentem czynnym – jednostronnie utwierdzonej**

**2.1. Schematy obliczeniowe i wykresy momentów zginających odpowiadające poszczególnym obciążeniom czynnym działającym jako obciążenia pojedyncze**

**2.2. Obliczenia**

$$R_{UP} = -P = -20 \text{ kN} \quad , \quad M_{UP} = -P \cdot a = -20 \text{ kNm}$$

$$M_{PA} = P \cdot a = 20 \text{ kNm} \quad , \quad M_{PB} = 0$$

$$R_{UM} = 0 \quad , \quad M_{UM} = M = 10 \text{ kNm}$$

$$M_{MA} = -M = -10 \text{ kNm} \quad , \quad M_{MB} = -M = -10 \text{ kNm}$$

$$R_U = R_{UP} + R_{UM} = -20 + 0 = -20 \text{ kN}$$

$$M_U = M_{UP} + M_{UM} = -20 + 10 = -10 \text{ kNm}$$

$$M_A = M_{PA} + M_{MA} = 20 - 10 = 10 \text{ kNm}$$

$$M_B = M_{PB} + M_{MB} = 0 - 10 = -10 \text{ kNm}$$

**Obliczanie sił wewnętrznych belek niepojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym, z zastosowaniem metody superpozycji (3)**

**3. Przykład obliczeniowy dla belki z dwiema siłami czynnymi - swobodnie podpartej**

**3.1. Schematy obliczeniowe i wykresy momentów zginających odpowiadające poszczególnym obciążeniom czynnym działającym jako obciążenia pojedyncze**

**3.2. Obliczenia**

$$R_{A1} = P_1 \frac{b_1}{a_1 + b_1} = 20 \frac{3+3}{2+3+3} = 15 \text{ kN} \quad , \quad R_{B1} = P_1 \frac{a_1}{a_1 + b_1} = 20 \frac{2}{2+3+3} = 5 \text{ kN}$$

$$M_{P1C} = P_1 \frac{a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1} = 20 \frac{2(3+3)}{2+3+3} = 30 \text{ kNm} \quad , \quad M_{P1D} = M_{P1C} \frac{b_2}{b_1} = 30 \frac{3}{3+3} = 15 \text{ kNm}$$

$$R_{A2} = P_2 \frac{b_2}{a_2 + b_2} = 10 \frac{3}{2+3+3} = 3,75 \text{ kN} \quad , \quad R_{B2} = P_2 \frac{a_2}{a_2 + b_2} = 10 \frac{2+3}{2+3+3} = 6,25 \text{ kN}$$

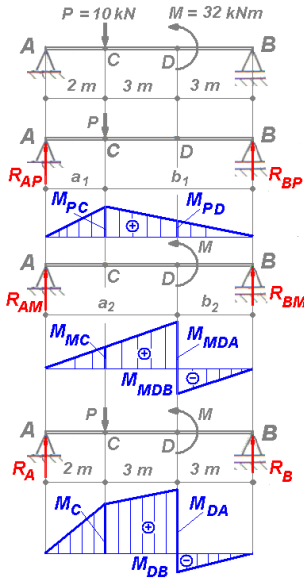
$$M_{P2D} = P_2 \frac{a_2 \cdot b_2}{a_2 + b_2} = 10 \frac{(2+3) \cdot 3}{2+3+3} = 18,75 \text{ kNm} \quad , \quad M_{P2C} = M_{P2D} \frac{a_1}{a_2} = 18,75 \frac{2}{2+3} = 7,5 \text{ kNm}$$

$$R_A = R_{A1} + R_{A2} = 15 + 3,75 = 18,75 \text{ kN} \quad , \quad R_B = R_{B1} + R_{B2} = 5 + 6,25 = 11,25 \text{ kN}$$

$$M_C = M_{P1C} + M_{P2C} = 30 + 7,5 = 37,5 \text{ kNm} \quad , \quad M_D = M_{P1D} + M_{P2D} = 15 + 18,75 = 33,75 \text{ kNm}$$



**Obliczanie sił wewnętrznych belek z niepojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym, z zastosowaniem metody superpozycji (4)**



**4. Przykład obliczeniowy dla belki swobodnie podpartej, z siłą czynną i z momentem czynnym między podporami**

**4.1. Schematy obliczeniowe i wykresy momentów zginających odpowiadające poszczególnym obciążeniom czynnym działającym jako obciążenia pojedyncze**

**4.2. Obliczenia**

$$R_{AP} = P \frac{b_1}{a_1 + b_1} = 10 \frac{3 + 3}{2 + 3 + 3} = 7,5 \text{ kN}, \quad R_{BP} = P \frac{a_1}{a_1 + b_1} = 10 \frac{2}{2 + 3 + 3} = 2,5 \text{ kN}$$

$$M_{PC} = P \frac{a_1 \cdot b_1}{a_1 + b_1} = 10 \frac{2(3 + 3)}{2 + 3 + 3} = 15 \text{ kNm}, \quad M_{PD} = M_{PC} \frac{b_2}{b_1} = 15 \frac{3}{3 + 3} = 7,5 \text{ kNm}$$

$$R_{AM} = \frac{M}{a_2 + b_2} = \frac{32}{2 + 3 + 3} = 4 \text{ kNm}, \quad R_{BM} = -\frac{M}{a_2 + b_2} = -\frac{32}{2 + 3 + 3} = -4 \text{ kNm}$$

$$M_{MDA} = M \frac{a_2}{a_2 + b_2} = 32 \frac{2 + 3}{2 + 3 + 3} = 20 \text{ kNm}, \quad M_{MC} = M_{MDA} \frac{a_1}{a_2} = 20 \frac{2}{2 + 3} = 8 \text{ kNm}$$

$$M_{MDB} = -M \frac{b_2}{a_2 + b_2} = -32 \frac{3}{2 + 3 + 3} = -12 \text{ kNm}$$

$$R_A = R_{AP} + R_{AM} = 7,5 + 4 = 11,5 \text{ kN}, \quad R_B = R_{BP} + R_{BM} = 2,5 - 4 = -1,5 \text{ kN}$$

$$M_C = M_{PC} + M_{MC} = 15 + 8 = 23 \text{ kNm}, \quad M_{DA} = M_{PD} + M_{MDA} = 7,5 + 20 = 27,5 \text{ kNm}$$

$$M_{DB} = M_{PB} + M_{MDB} = 7,5 - 12 = -4,5 \text{ kNm}$$

**Koniec wprowadzenia nr 2**