Wprowadzenie nr 1[*] do ćwiczeń z przedmiotu „Wytrzymałość materiałów”
dla studentów II roku studiów dziennych I stopnia w kierunku „Energetyka”
Wydz. Energetyki i Paliw”, semestr zimowy 2012/2013

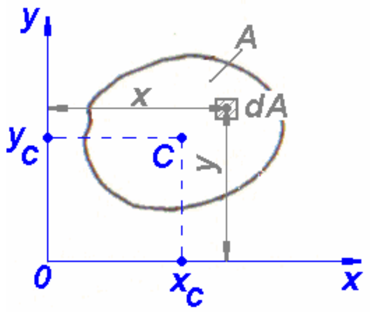
1. Zakres wprowadzenia nr 1

Niniejsze wprowadzenie dotyczy ćwiczenia, na którym każdy student opracowuje samodzielnie **„Arkusz ćwiczeniowy nr 1”.** Przez opracowanie tego arkusza studenci nabywają umiejętność obliczania parametrów geometrycznych dla figur płaskich. Ta umiejętność jest niezbędna do zdobywania kolejnych umiejętności, jakie - zgodnie programem przedmiotu – studenci będą nabywać na kolejnych ćwiczeniach.

2. Momenty statyczne

Jeżeli zadanej figurze płaskiej o polu ***A*** przyporządkuje się prostokątny układ współrzędnych ***0, x, y*** (rys. 1), to momenty statyczne S_x, S_y tej figury względem osi ***x, y*** definiuje się za pomocą zależności:

$$S_x = \int_A y dA \quad , \quad S_y = \int_A x dA \qquad (1)$$



Rys.1

Z zależności (1) wynika, że dla każdej figury płaskiej w układzie jak na rys. 1 można wyznaczyć taki punkt ***C***, że za pomocą współrzędnych x_C, y_C tego punktu można przedstawić zależności (1) w postaci:

$$S_x = A \cdot y_c \quad , \quad S_y = A \cdot x_c \qquad (2)$$

Tak wyznaczony punkt ***C*** figury płaskiej jest nazywany jej **środkiem ciężkości**, a parametry x_C, y_C są współrzędnymi tego środka.

Momenty statyczne mogą mieć wartości dodatnie, ujemne lub równe zero. Zależy to od usytuowania figury w stosunku do osi, względem której jest liczony moment statyczny. Ten moment jest równy zero wtedy, gdy jest obliczony względem osi przechodzącej przez środek ciężkości figury. Taka oś nosi nazwę **osi centralnej**. Jeżeli figura płaska ma oś symetrii, to jest ona także osią centralną tej figury, bo środek ciężkości figury leży na osi symetrii figury.

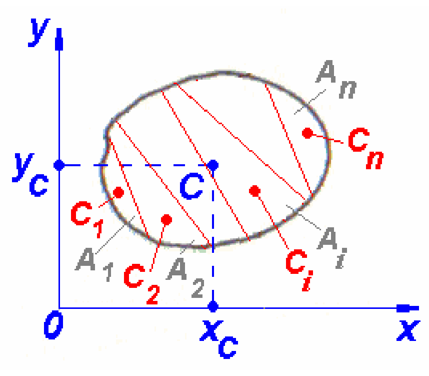
Z zależności (1) i (2) wynika, że gdy figurę płaską o polu ***A*** podzielić na szereg pól A_1, A_2, …A_i, …A_n przylegających ściśle do siebie (rys.2), to momenty statyczne S_x, S_y tej figury można obliczyć ze wzorów:

$$S_x = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \cdot y_{ci} \quad , \quad S_y = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \cdot x_{ci} \qquad (3)$$

gdzie: x_{ci} , y_{ci} – współrzędne środka ciężkości C_i pola A_i.

Ze wzorów (2) i (3) uzyskuje się następujące zależności:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} A_i \cdot x_{ci}}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i} \quad , \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} A_i \cdot y_{ci}}{\sum_{i=1}^{i=n} A_i} \qquad (4)$$



Rys.2

[*] Autorem wprowadzenia jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH. Wprowadzenie (6 stron) stanowi przedmiot prawa autorskiego określonego w Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. 1994 r. Nr 24 poz.83 z późn. zmianami). Autor nie wyraża zgody na inne wykorzystywanie wprowadzenia niż podane w jego przeznaczeniu.

Zależności (4) są wykorzystywane w praktyce inżynierskiej do wyznaczania środka ciężkości figury złożonej, którą można podzielić na przylegające ściśle do siebie figury proste o znanych położeniach środków ciężkości. Takimi figurami prostymi są m. in. kwadraty, prostokąty i koła.

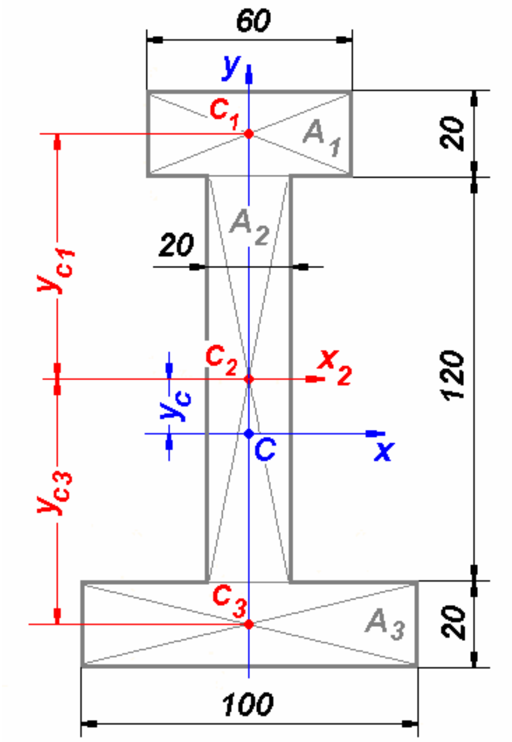
3. Przykład 1

3.1. Temat

Wyznaczyć współrzędne x_C , y_C położenia środka ciężkości figury płaskiej (rys. 3), względem zadanych osi x_2, y. Wymiary figury podano na rys. 3 w milimetrach. Wyniki obliczeń współrzędnych podać w centymetrach.

3.2. Założenia

- Ponieważ oś y jest osią symetrii figury, współrzędna x_C jest równa zero. Obliczyć należy tylko współrzędną y_C.
- Figurę pokazaną na rys. 3 można podzielić na przylegające ściśle do siebie trzy prostokąty o polach A_1, A_2, A_3 mające środki ciężkości C_1, C_2 , C_3 o znanych położeniach. Z tego powodu, do obliczenia współrzędnej y_C można zastosować wzór (4).



Rys.3

3.3. Obliczenie pól A_1, A_2, A_3

$$A_1 = 60 \cdot 20 = 12 \cdot 10^2 \; mm^2 = 12 \; cm^2$$

$$A_2 = 20 \cdot 120 = 24 \cdot 10^2 \; mm^2 = 24 \; cm^2$$

$$A_3 = 100 \cdot 20 = 20 \cdot 10^2 \; mm^2 = 20 \; cm^2$$

3.4.Określenie współrzędnych y_{c1}, y_{c2}, y_{c3}

$$y_{c1} = 70 \; mm = 7 \; cm \,, \qquad y_{c2} = 0 \,, \qquad y_{c3} = -70 \; mm = -7 \; cm \,,$$

3.5. Obliczenie współrzędnej y_C

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} A_i \cdot y_{ci}}{\sum_{i=1}^{i=3} A_i} = \frac{12 \cdot 7 + 24 \cdot 0 + 20 \cdot (-7)}{12 + 24 + 20} = -1 \; cm$$

Ujemna wartość współrzędnej y_C potwierdza, że środek ciężkości C figury z rys. 3 jest usytuowany poniżej osi x_2.

4. Momenty bezwładności

Jeżeli zadanej figurze płaskiej o polu ***A*** przyporządkuje się prostokątny układ współrzędnych ***0, x, y*** (rys.4), to dla tej figury definiuje się trzy następujące rodzaje momentów bezwładności

- momenty bezwładności osiowe:

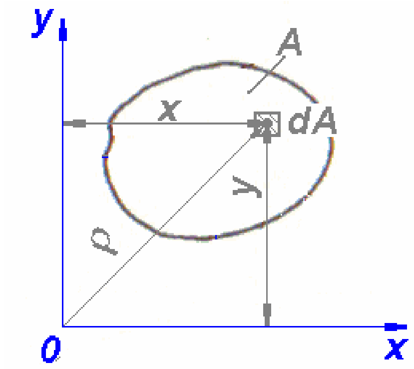
$$J_x = \int_A y^2 dA \quad , \quad J_y = \int_A x^2 dA \qquad (5)$$

- moment bezwładności biegunowy:

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA = J_x + J_y \qquad (6)$$

- moment bezwładności dewiacji:

$$D_{xy} = \int_A xydA \qquad (7)$$

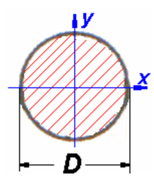
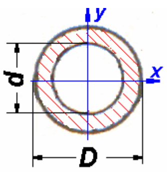
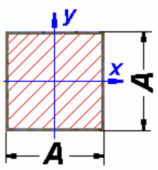
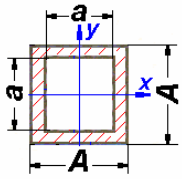
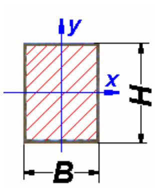
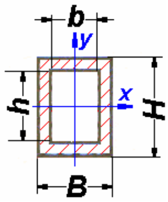


Rys. 4

Momenty bezwładności osiowe i biegunowe są zawsze wielkościami dodatnimi, natomiast moment dewiacji może być dodatni, ujemny lub równy zero. Moment dewiacji jest równy zero wtedy, gdy przynajmniej jedna z osi ***x, y*** jest osią symetrii figury. W tym przypadku osie ***x, y*** są nazywane **osiami głównymi** figury. Gdy osie główne figury płaskiej przecinają się w środku jej ciężkości, są one także centralnymi osiami tej figury. Takie osie figury płaskiej nazywa się **głównymi centralnymi osiami** figury.

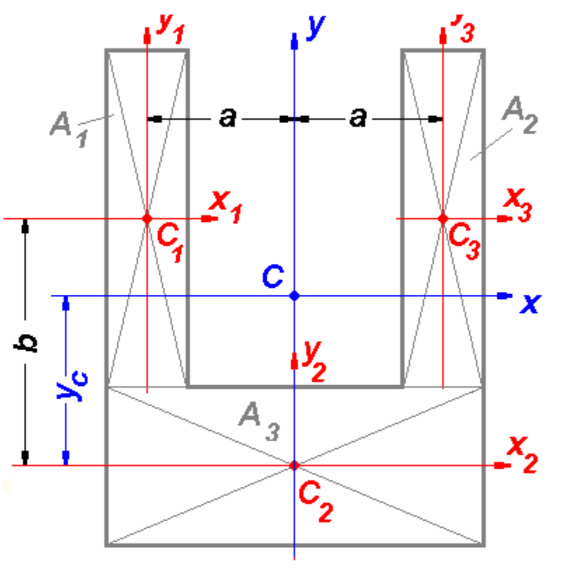
Jeżeli momenty bezwładności figury płaskiej zostały obliczone względem jej głównych centralnych osi, to takie momenty są nazywane **głównymi centralnymi momentami bezwładności**. W tab. 1 zestawiono wzory algebraiczne do obliczeń głównych centralnych momentów bezwładności figur symetrycznych prostych oraz odpowiadających im figur symetrycznych złożonych z tzw. wybraniem.

Tab.1.

Figura symetryczna prosta	Moment osiowy bezwładności		Figura symetryczna złożona z wybraniem	Moment osiowy bezwładności	
	J_x	J_y		J_x	J_y
	$J_x = \frac{\pi d^4}{64}$	$J_y = \frac{\pi d^4}{64}$		$J_x = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$	$J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$
	$J_x = \frac{A^4}{12}$	$J_y = \frac{A^4}{12}$		$J_x = \frac{A^4 - a^4}{12}$	$J_y = \frac{A^4 - a^4}{12}$
	$J_x = \frac{BH^3}{12}$	$J_y = \frac{B^3H}{12}$		$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$J_x = \frac{B^3H - b^3h}{12}$

Ze wzorów podanych w tab. 1 wynika, że gdy odpowiadające sobie figury symetryczne bez wybrania i z wybraniem mają takie same położenie środka ciężkości, to moment bezwładności figury z wybraniem jest łatwy do obliczenia, bo jest różnicą momentu bezwładności figury bez wybrania oraz momentu bezwładności figury odwzorowującej to wybranie.

Natomiast bardziej pracochłonne są obliczenia momentów bezwładności figury symetrycznej złożonej, gdy tworzące tę figurę proste figury symetryczne mają środki ciężkości przesunięte względem siebie (rys.5). W przypadku takiej figury złożonej, obliczenie jej momentów bezwładności wymaga wykonania trzech kroków obliczeniowych, z których pierwszym jest wyznaczenie położenia środka ciężkości j figury złożonej, wykonywane w sposób omówiony w p. 2 i 3. W drugim kroku, dla każdej figury prostej oblicza się osiowe momenty bezwładności względem osi ***x, y*** poprowadzonych przez środek ciężkości ***C*** figury złożonej, równolegle do osi symetrii figur prostych.



Rys.5

Te momenty oblicza się za pomocą tzw. twierdzenia Steinera, którego treść odpowiadającą potrzebom omawianych obliczeń można sformułować następująco:

„Moment bezwładności figury prostej, obliczony względem osi poprowadzonej równolegle do głównej centralnej osi tej figury, jest równy sumie głównego centralnego momentu bezwładności figury prostej oraz iloczynu dwu czynników, z których jednym jest kwadrat odległości obydwu osi, a drugim – pole figury prostej".

Wykorzystując twierdzenie Steinera uzyskuje się dla przypadku figury z rys. 5 następujące wzory:

$$\begin{aligned} J_{1x} &= J_{1x1} + (b - |y_c|)^2 \cdot A_1 \quad , \quad J_{1y} = J_{1y1} + a^2 \cdot A_1 \\ J_{2x} &= J_{2x2} + y_c{}^2 \cdot A_2 \quad , \quad J_{2y} = J_{2y2} \\ J_{3x} &= J_{3x3} + (b - |y_c|)^2 \cdot A_3 \quad , \quad J_{3y} = J_{3y3} + a^2 \cdot A_3 \end{aligned} \tag{8}$$

gdzie:

J_{1x}, J_{2x}, J_{3x} - momenty bezwładności figur prostych o polach A_1, A_2, A_3, obliczone względem osi ***x***,

J_{1y}, J_{2y}, J_{3y} - momenty bezwładności figur prostych o polach A_1, A_2, A_3, obliczone względem osi ***y***,

$J_{1x1}, J_{2x2}, J_{3x3}$ - główne centralne momenty bezwładności figur prostych o polach A_1, A_2, A_3, obliczone względem osi $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}$ tych figur, z zastosowaniem wzorów podanych w tab. 1,

$J_{1y1}, J_{2y2}, J_{3y3}$ - główne centralne momenty bezwładności figur prostych o polach A_1, A_2, A_3, obliczone względem osi głównych $\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}$ tych figur, z zastosowaniem wzorów podanych w tab. 1,

$|y_c|$ – wartość bezwzględna współrzędnej y_c środka ciężkości ***C*** figury złożonej.

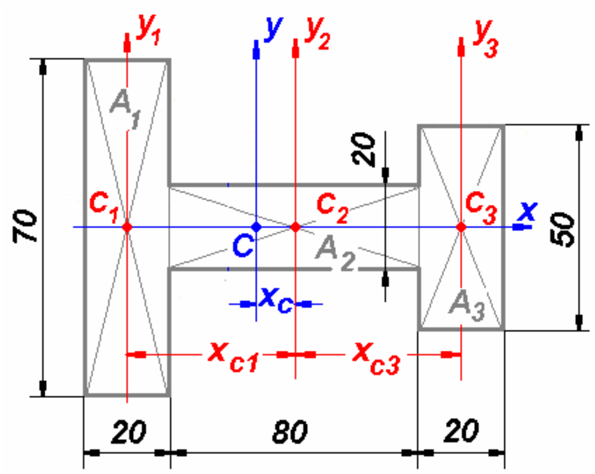
Z kolei w trzecim, ostatnim kroku omawianych obliczeń wyznacza się główne centralne momenty bezwładności J_x, J_y, figury złożonej, co wykonuje się sumując odpowiadające sobie momenty bezwładności figur prostych, obliczone za pomocą wzorów (8):

$$J_x = J_{1x} + J_{2x} + J_{3x} \quad , \quad J_y = J_{1y} + J_{2y} + J_{3y} \qquad (9)$$

5. Przykład 2

5.1. Temat

Obliczyć główne centralne momenty bezwładności figury złożonej pokazanej na rys. 6. Wymiary figury podano na rys. 6 w milimetrach. Momenty bezwładności obliczyć w cm^4, z zaokrągleniem do pierwszego miejsca po przecinku dziesiętnym.



Rys.6

5.2. Obliczenie pól A_1, A_2, A_3

$$A_1 = 70 \cdot 20 = 14 \cdot 10^2\ mm^2 = 14\ cm^2$$

$$A_2 = 20 \cdot 80 = 16 \cdot 10^2\ mm^2 = 16\ cm^2$$

$$A_3 = 50 \cdot 20 = 10 \cdot 10^2\ mm^2 = 10\ cm^2$$

5.3. Określenie współrzędnych x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}

$$x_{c1} = -50\ mm = -5\ cm\,, \quad x_{c2} = 0\,, \quad x_{c3} = 50\ mm = 5\ cm\,,$$

5.4. Obliczenie współrzędnej x_c

Wykorzystując wzór (4) uzyskuje się:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} A_i \cdot x_{ci}}{\sum_{i=1}^{i=3} A_i} = \frac{14 \cdot (-5) + 16 \cdot 0 + 10 \cdot 5}{14 + 16 + 10} = -0{,}5\ cm$$

Ujemna wartość współrzędnej $\boldsymbol{x_c}$ potwierdza, że środek ciężkości ***C*** figury z rys. 6 jest usytuowany na lewo od osi $\boldsymbol{y_2}$.

5.5. Obliczenie głównych centralnych momentów bezwładności figur prostych

Wykorzystując wzory podane w tab.1 uzyskuje się:

$$J_{1x1} = \frac{2 \cdot 7^3}{12} = 57{,}2\ cm^4, \quad J_{2x2} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5{,}3\ cm^4, \quad J_{3x3} = \frac{2 \cdot 5^3}{12} = 20{,}8\ cm^4$$

$$J_{1y1} = \frac{2^3 \cdot 7}{12} = 4{,}7\ cm^4, \quad J_{2y2} = \frac{8^3 \cdot 2}{12} = 85{,}3\ cm^4, \quad J_{3y3} = \frac{2^3 \cdot 5}{12} = 3{,}3\ cm$$

5.6. Obliczenie momentów bezwładności figur prostych względem osi *x, y*

Wykorzystując twierdzenie Steinera, uzyskuje się:

$$J_{1x} = J_{1x1} = 57{,}2\ cm^4,\ \ J_{2x} = J_{2x2} = 5{,}3\ cm^4,\ \ J_{3x} = J_{3x3} = 20{,}8\ cm^4$$

$$J_{1y} = J_{1y1} + (|x_{c1}| - |x_c|)^2 \cdot A_1 = 4{,}7 + (5 - 0{,}5)^2 \cdot 14 = 288{,}2\ cm^4$$

$$J_{2y} = J_{2y2} + |x_c|^2 \cdot A_2 = 85{,}3 + 0{,}5^2 \cdot 16 = 89{,}3\ cm^4$$

$$J_{3y} = J_{3y3} + (|x_{c3}| - |x_c|)^2 \cdot A_3 = 3{,}3 + (5 - 0{,}5)^2 \cdot 10 = 205{,}8\ cm^4$$

5.7. Obliczenie głównych centralnych momentów bezwładności figury złożonej

Wykorzystując wzory (9) uzyskuje się:

$$J_x = J_{1x} + J_{2x} + J_{3x} = 57{,}2 + 5{,}3 + 20{,}8 = 83{,}3\ cm^4$$

$$J_y = J_{1y} + J_{2y} + J_{3y} = 288{,}2 + 89{,}3 + 205{,}8 = 583{,}3\ cm^4$$

Koniec wprowadzenia nr1