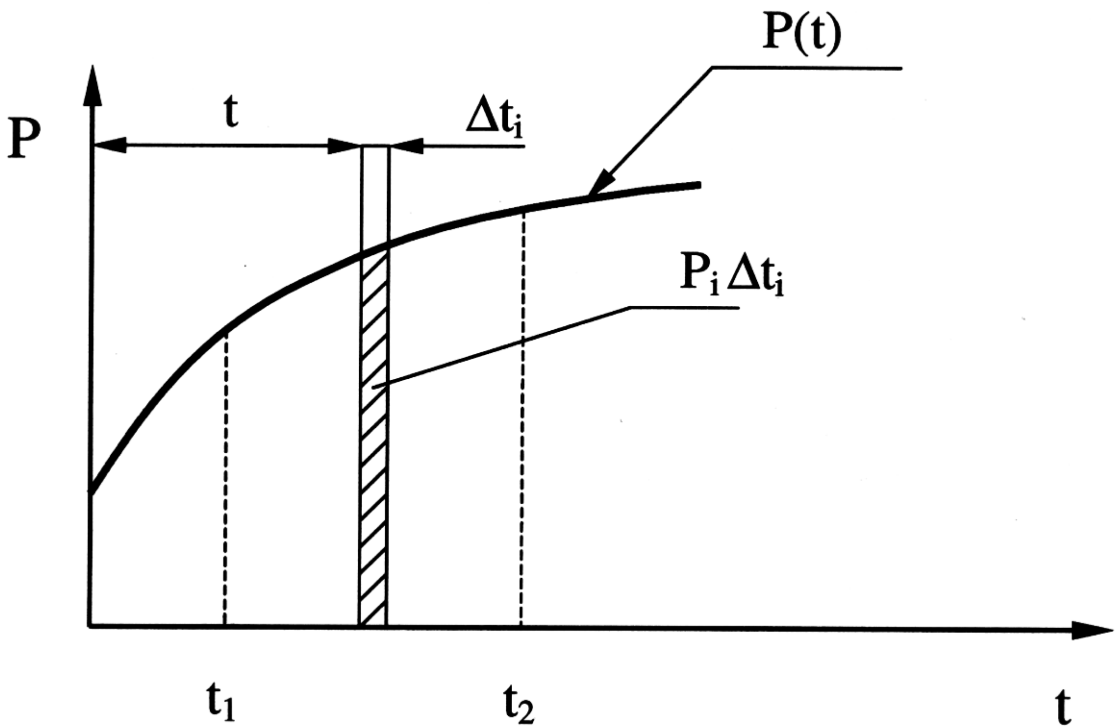
Pęd i popęd siły

Popęd siły $\overline{P}(t)$ w przedziale czasu $t_2 - t_1$

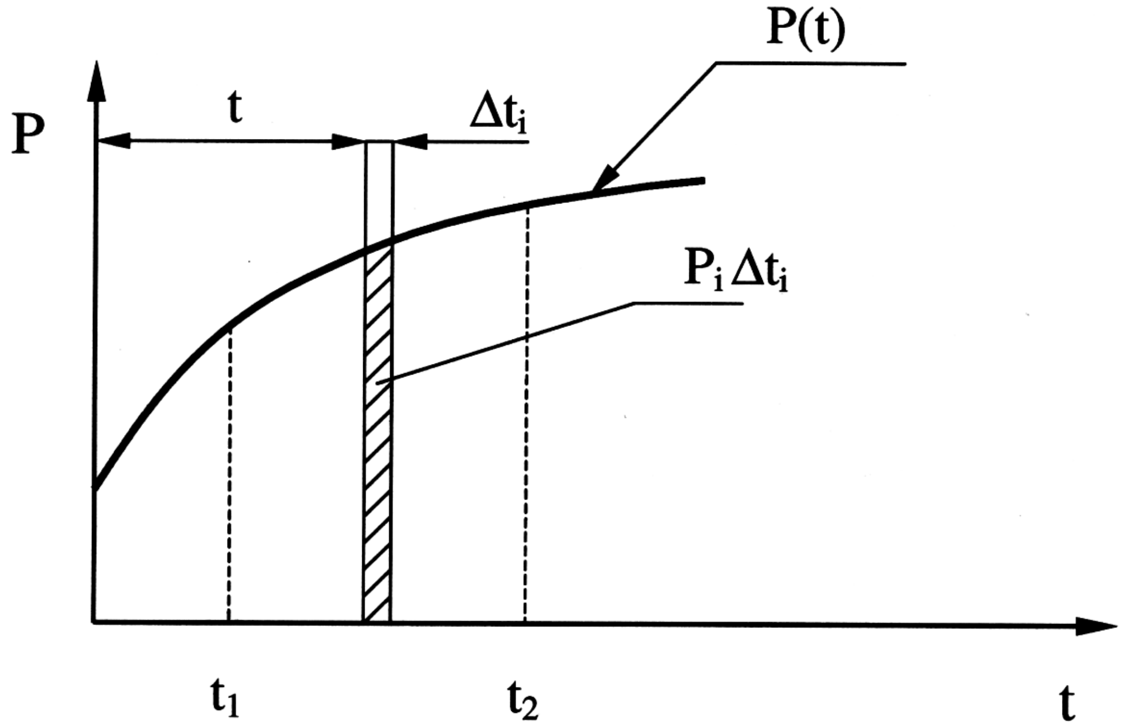


$$\overline{\Pi} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P} dt$$

$$\overline{\Pi}_x = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}_x(t) dt \qquad \overline{\Pi}_y = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}_y(t) dt \qquad \overline{\Pi}_z = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}_z(t) dt \qquad \Pi = \sqrt{\Pi_x^2 + \Pi_y^2 + \Pi_z^2}$$

Pęd i popęd siły

Popęd siły $\overline{P}(t)$ w przedziale czasu $t_2 - t_1$



Jeżeli na punkt materialny działa układ sił $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ to

$$\overline{\Pi} = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}_1 dt + \ldots + \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}_n dt = \int_{t_1}^{t_2} (\overline{P}_1 + \ldots + \overline{P}_n) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\overline{W} + \overline{W}_R) dt$$

lub

$$\overline{\Pi} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\Pi}_i$$

Pęd punktu materialnego („ilość ruchu") jest to wektor $m\overline{v}$

$$m\overline{a} = \overline{P} \qquad m\overline{a} = m\frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d(m\overline{v})}{dt} \qquad \text{stąd} \qquad \overline{P}dt = d(m\overline{v})$$

$$\int_{v_1}^{v_2} d(m\overline{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}dt \qquad \text{lub} \qquad \underline{m\int_{v_1}^{v_2} d\overline{v} = m(\overline{v}_2 - \overline{v}_1) = \int_{t_1}^{t_2} \overline{P}dt}$$

Jest to tzw. <u>**zasada pędu i popędu dla punktu materialnego**</u>:

Przyrost geometryczny (wektorowy) pędu w pewnym odstępie czasu równy jest popędowi sił działających w tym odstępie czasu.

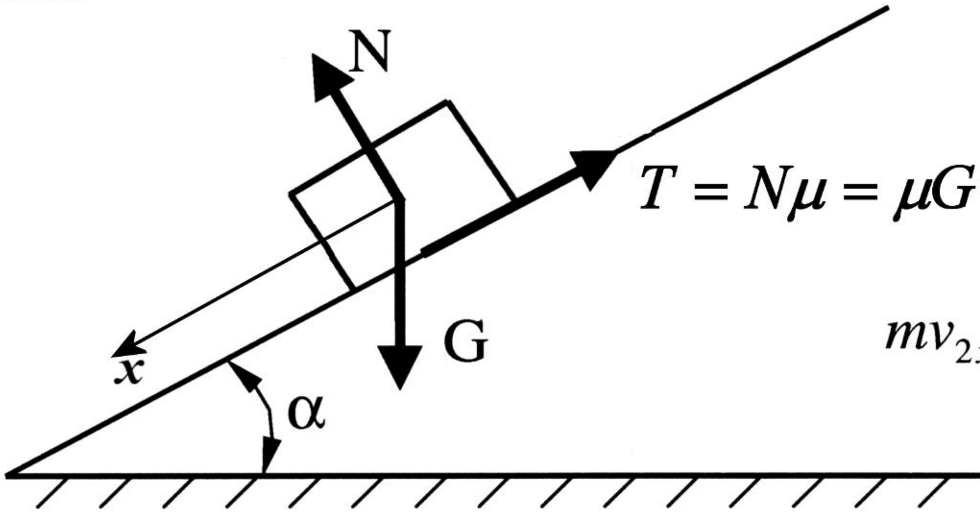
Jeżeli $\overline{P} = 0$ to $m\overline{v}_2 = m\overline{v}_1$, tzn. pęd punktu materialnego jest stały.

<u>**Zasada zachowania pędu.**</u>

Jeżeli układ sił działających na punkt materialny pozostaje w równowadze, to pęd punktu jest stały.

Przykład

Ciało o ciężarze $\overline{G}$ zsuwa się po chropowatej równi pochyłej nachylonej pod kątem α do poziomu. Współczynnik tarcia wynosi μ. W chwili początkowej prędkość ciała wynosi $\overline{v}$. Po jakim czasie prędkość ciała będzie 2 razy większa?



$$T = N\mu = \mu G \cos\alpha$$

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \int_{t_1=0}^{t_2=t} P_x \, dt$$

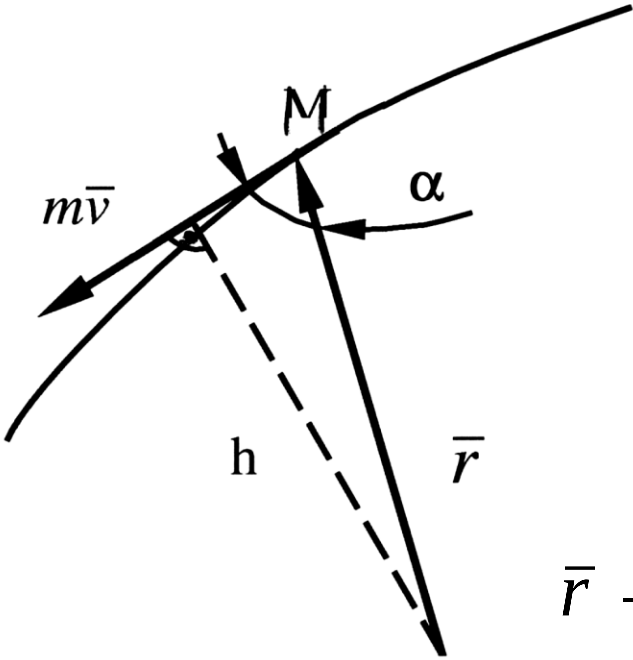
Ponieważ $P_x = const.$ więc $\int_0^t P_x dt = P_x t = (G\sin\alpha - T)t = G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$

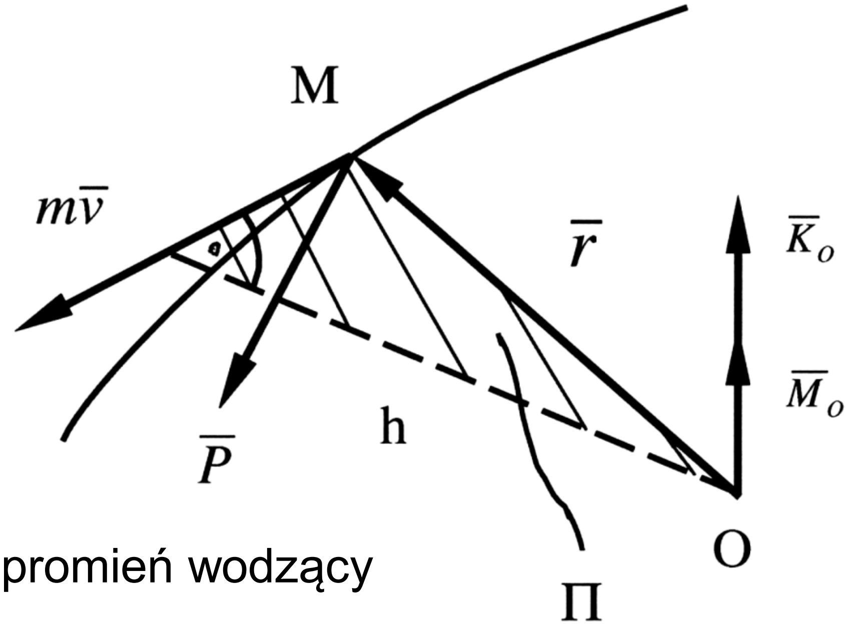
stąd $2mv - mv = G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$ $\qquad t = \dfrac{v}{G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t}$

Kręt

Niech punkt materialny M o masie m porusza się po krzywej płaskiej (w płaszczyźnie Π).

$\bar{r}, \bar{P}, \bar{v}$ - w płaszczyźnie Π





$\bar{r}$ – wektor promień wodzący

$\bar{v}$ – prędkość punktu M względem bieguna O

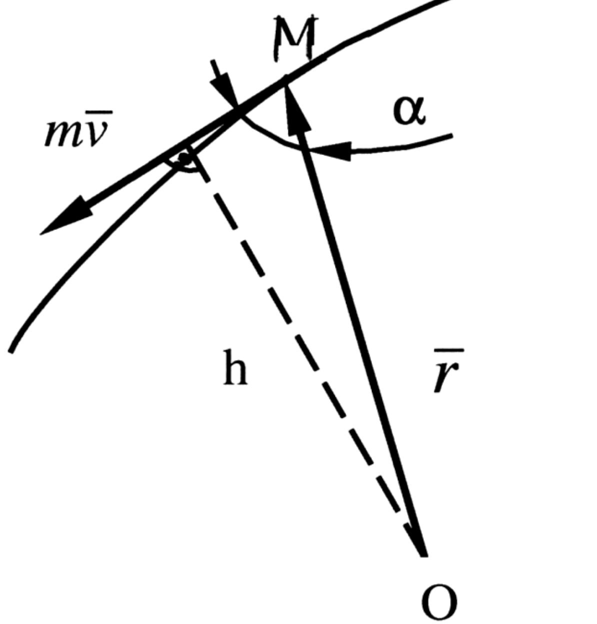
<u>Krętem punktu M względem bieguna O nazywamy wektor</u>

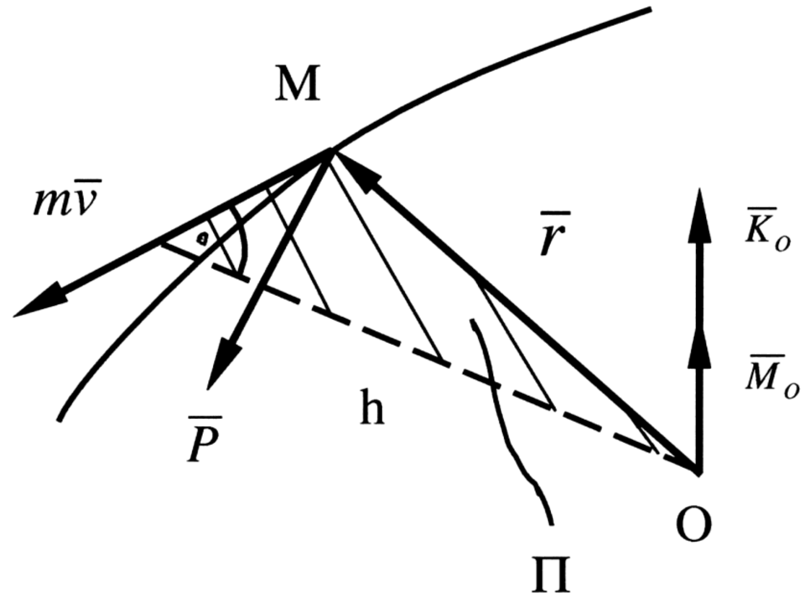
$$\bar{K}_O = \bar{r} \times m\bar{v}, \qquad \bar{K} \perp \Pi$$

$$\left|\bar{K}\right| = K = mv \cdot r \sin\left(\bar{r}, \bar{v}\right) = mv \cdot h$$

Kręt

$\overline{r}, \overline{P}, \overline{v}$ - w płaszczyźnie Π





Załóżmy, że ruch punktu materialnego odbywa się pod działaniem siły $\overline{P}$ (w płaszczyźnie Π). Moment tej siły względem bieguna O wynosi $\overline{M}_O = \overline{r} \times \overline{P}$

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = \frac{d\overline{r}}{dt} \times m\overline{v} + \overline{r} \times m\frac{d\overline{v}}{dt}$$

UWAGA! $\overline{v}$ jest prędkością punktu względem bieguna O.

ale $\dfrac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v}, \quad \dfrac{d\overline{v}}{dt} = \overline{a}$ stąd $\dfrac{d\overline{K}_O}{dt} = \overline{v} \times m\overline{v} + \overline{r} \times m\overline{a}$

Kręt

Kąt między wektorem $\bar{v}$ i $m\bar{v} = 0$ stąd $\bar{v} \times m\bar{v} = 0$

W taki razie $\dfrac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{r} \times \bar{P} = \bar{M}_O$

Jeżeli na punkt M działa suma sił czynnych i reakcji to $\bar{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{iO}$

czyli $\boxed{\dfrac{d\bar{K}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{iO}}$ Pochodna względem czasu krętu punktu materialnego obliczonego względem bieguna O równa jest sumie geometrycznej momentów sił działających na ten punkt liczonych względem tego bieguna.

Jest to **zasada krętu dla punktu materialnego**.

Kręt

Jeżeli $\frac{d\overline{K}_O}{dt} = 0$ to $\overline{K}_O = const.$ - jeżeli suma geometryczna momentów sił działających na punkt materialny liczonych względem bieguna O jest równa zero, to kręt tego punktu materialnego jest stały.

Kręt układu punktów materialnych względem bieguna O równy jest sumie geometrycznej krętów wszystkich punktów materialnych względem tego bieguna tzn.

$$\overline{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{K}_{iO} = \sum_{i=1}^{n} (\overline{r}_i \times m\overline{v}_i)$$

DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO

Równanie dynamiczne ciała sztywnego w ruchu postępowym

Z twierdzenia o ruchu środka masy mamy: $\sum m_i \overline{a}_i = M \cdot \overline{a}_S$

ale $\overline{a}_i = const. = \overline{a}$, więc $\overline{a}_i \sum m_i = M \cdot \overline{a}_S$, stąd $\overline{a}_S = \overline{a}$

Równanie ruchu środka masy ma więc postać: $M \cdot \overline{a} = \sum \overline{P}_i$ lub

$$M\ddot{x} = \sum P_{ix}$$
$$M\ddot{y} = \sum P_{iy}$$
$$M\ddot{z} = \sum P_{iz}$$

$\sum \overline{P}_i$ - suma sił czynnych i reakcji

DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO

Ustalimy teraz jaki układ sił zewnętrznych spowoduje ruch postępowy.

Zastosujemy twierdzenie o pochodnej krętu przyjmując biegun w środku masy

$$\frac{d\overline{K}_S}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{iS}$$

Ponieważ wszystkie punkty ciała mają taką samą prędkość, jak środek masy, to

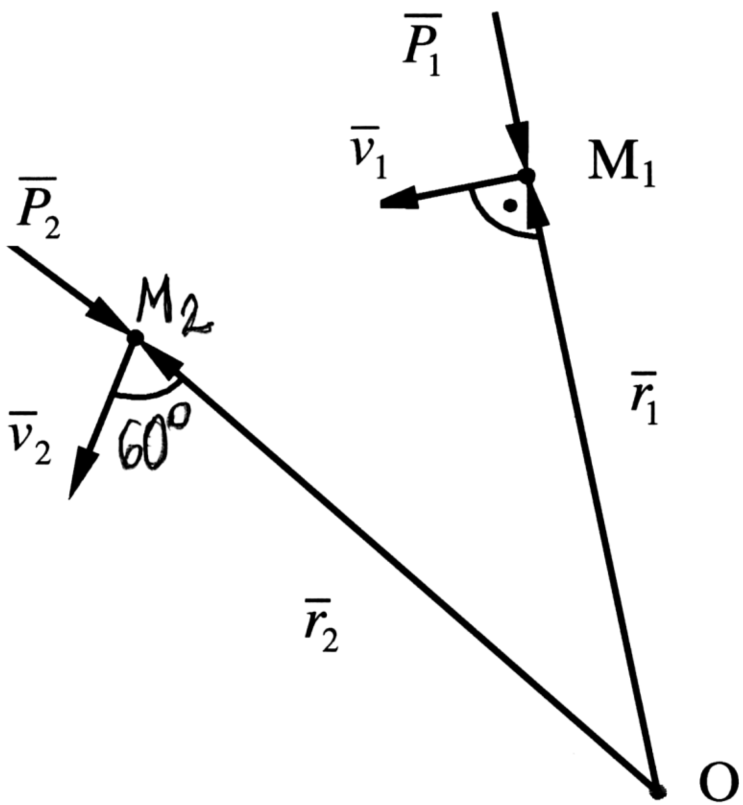
prędkości tych punktów względem środka masy są równe zero, więc $\overline{K}_S = 0$,

a więc i $\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_{iS} = 0$. Jest to warunek konieczny, by ciało poruszało się

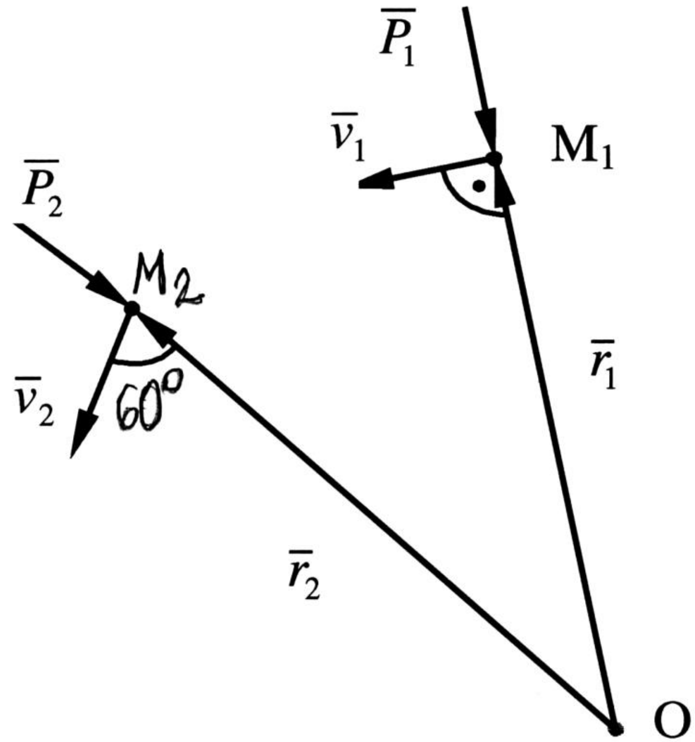
ruchem postępowym.

Przykład

Punkt materialny M o masie m porusza się pod działaniem siły $\overline{P}$, której prosta działania stale przechodzi przez nieruchomy punkt O. Znaleźć prędkość punktu w położeniu M_2, jeżeli w położeniu M_1 jego prędkość wynosi $v_1=4$m/s, przy czym $\frac{OM_1}{OM_2}=\frac{3}{2}$ a kąt jaki tworzy $\overline{v}_2$ z $\overline{P}$ wynosi $\alpha=60°$ zaś $\overline{v}_1$ z $\overline{P}$ 90°.



Rozwiązanie



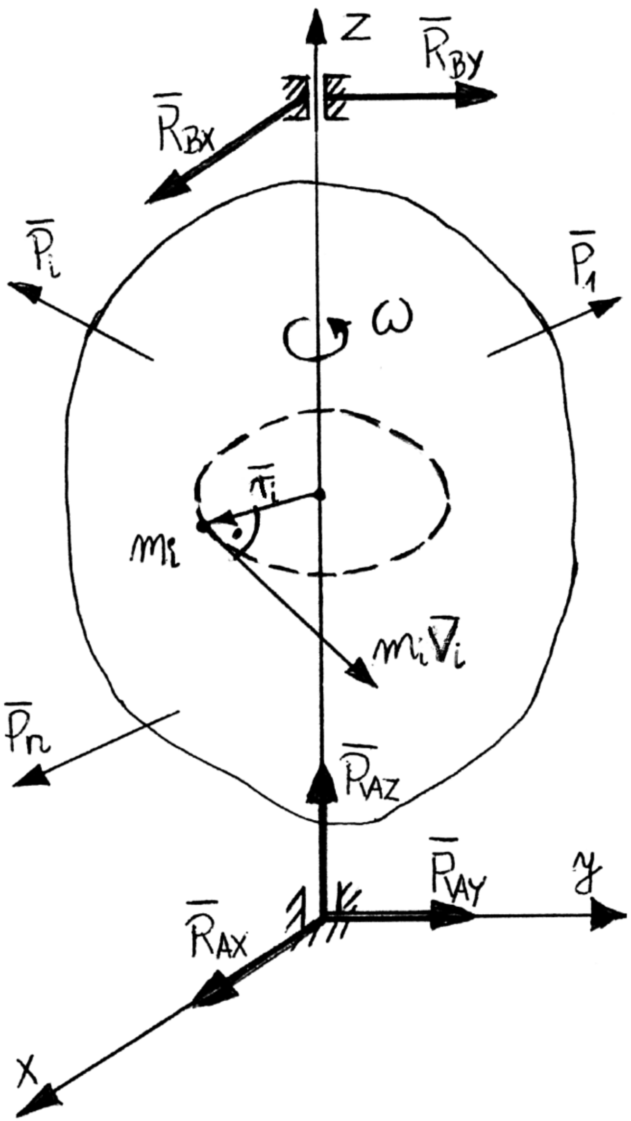
$$\overline{M} = \overline{r} \times \overline{P} = 0$$ bo w każdym położeniu $\overline{P} \parallel \overline{r}$

$$\frac{d\overline{K}_O}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \overline{K}_O = const. \qquad \overline{K}_{1O} = \overline{K}_{2O}$$

$$\overline{r}_1 \times m\overline{v}_1 = \overline{r}_2 \times m\overline{v}_2 \qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad r_1 \cdot v_1 \cdot \sin 90^\circ = r_2 \cdot v_2 \cdot \sin 60^\circ$$

$$r_1 \cdot 4 = \frac{2}{3} \cdot r_1 \cdot v_2 \cdot 0{,}866 \qquad \rightarrow \qquad v_2 = 6{,}93 \frac{m}{s}$$

Równanie dynamiczne ciała sztywnego w ruchu obrotowym



$$\overline{K}_{iz} = \overline{r}_i \times (m\overline{v})_i$$

$$K_{iz} = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$$

$$K_z = \sum K_{iz} = \sum m_i r_i^2 \omega = J_z \omega$$

Ponieważ $\dfrac{dK_z}{dt} = \sum M_{iz}$, to

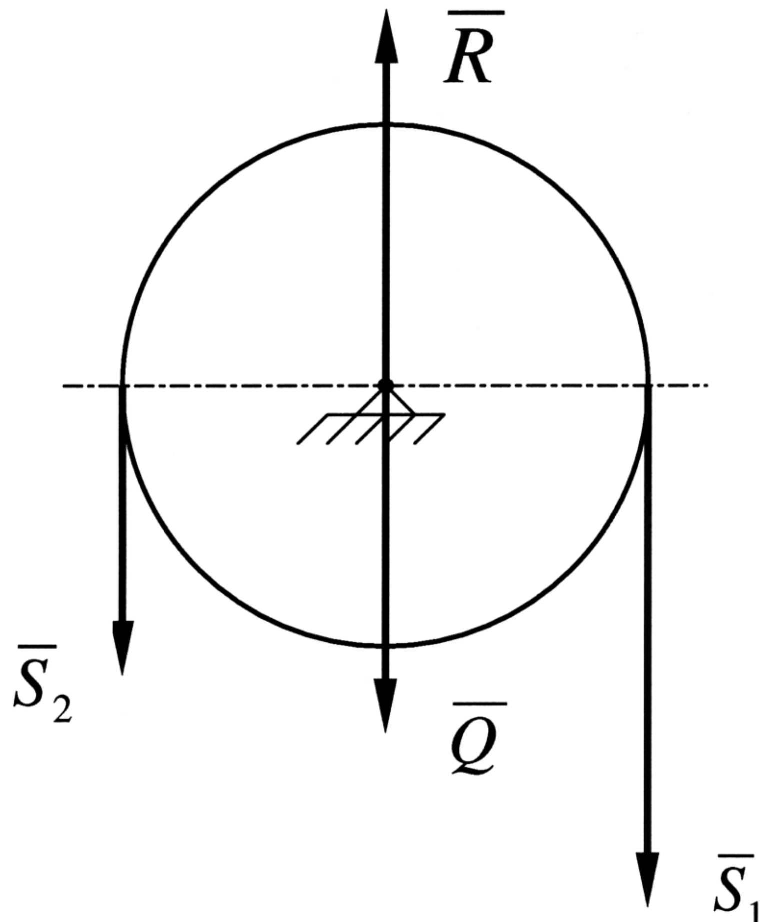
$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \frac{dK_z}{dt} = \sum M_{iz}$$

czyli $J_z \varepsilon = \sum M_{iz}$

Przyspieszenie kątowe $\varepsilon \neq 0$ tylko wtedy gdy $\sum M_{iz} \neq 0$

PRZYKŁAD 1

Wyznaczyć przyspieszenie koła pasowego o promieniu r, ciężarze $\overline{Q}$ i promieniu bezwładności względem osi obrotu i. Na koło działają naciągi części pędzącej i pędzonej pasa $\overline{S}_1$ i $\overline{S}_2$.



$$J_z \cdot \varepsilon = \sum M_{iz}$$

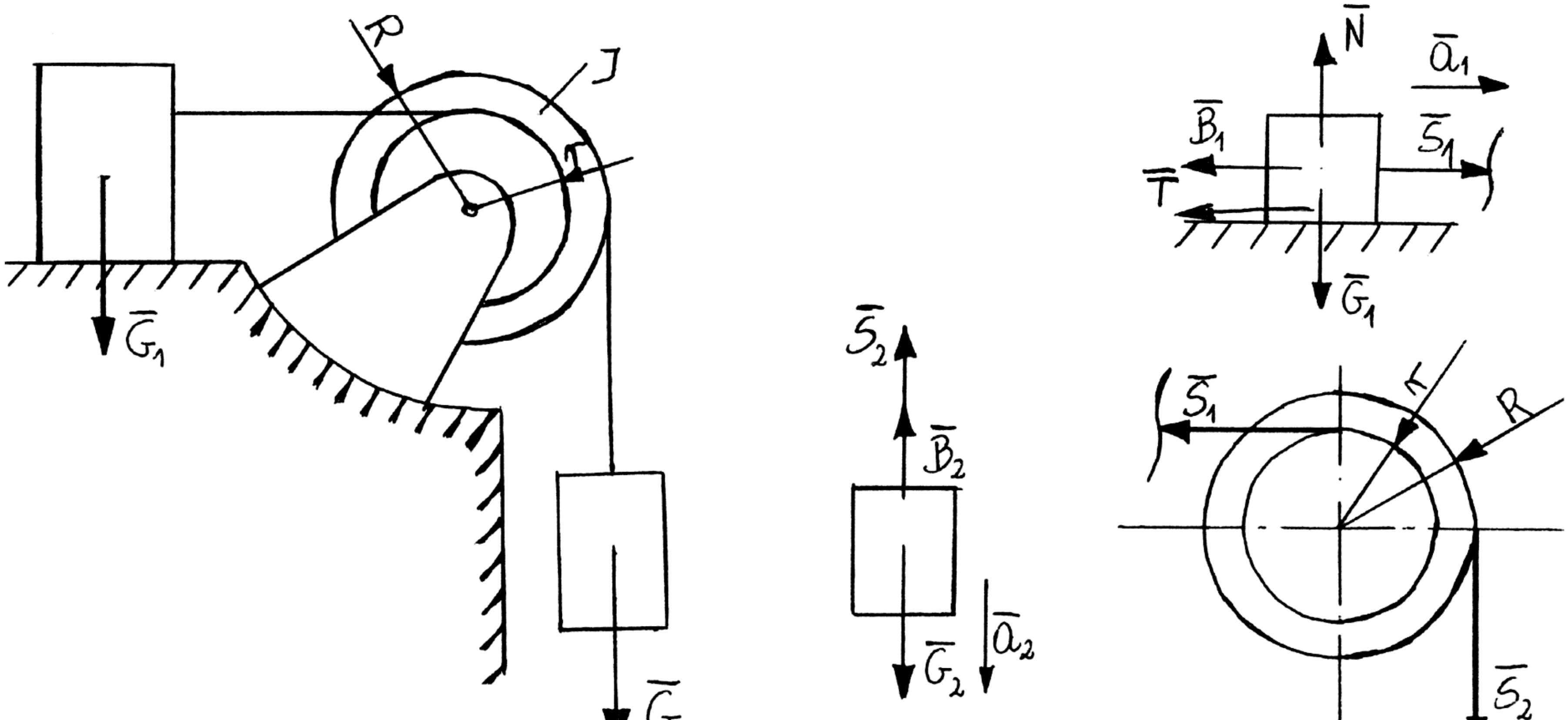
$$J_z = m \cdot i^2 = \frac{Q}{g} i^2$$

$$\sum M_{iz} = (S_1 - S_2) r$$

$$\varepsilon = \frac{(S_1 - S_2) r \cdot g}{Q i^2}$$

PRZYKŁAD 2

Dla układu przedstawionego na rysunku obliczyć przyspieszenie kątowe krążka, jeżeli G_1=500N, G_2=4000N, J=1000Nm^2, R=0.2m, r=0.1m, μ=0.4.



Ruch postępowy ciężaru G_1

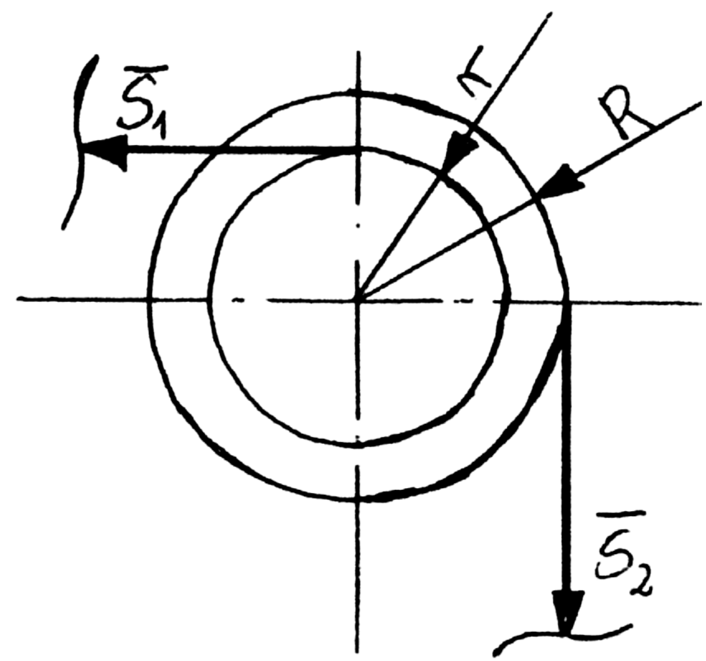
$$S_1 - B_1 - T = 0, \qquad T = \mu N = \mu G, \qquad B_1 = \frac{G_1}{g} a_1, \qquad \text{stąd}$$

równanie ruchu: $$S_1 = \frac{G_1}{g} a_1 + \mu G_1 \qquad (1)$$

Ruch obrotowy krążka

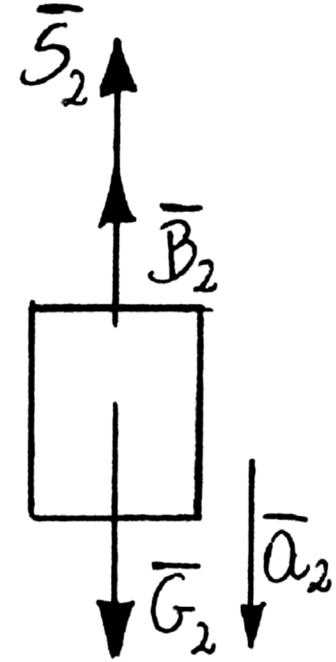
$$J_z \cdot \varepsilon = \sum M_{iz}, \qquad \sum M_{iz} = S_2 R - S_1 r, \qquad \text{stąd}$$

$$J_z \varepsilon = S_2 R - S_1 r \qquad (2)$$



$$J_z\varepsilon = S_2R - S_1r \qquad (2)$$

Ruch postępowy ciężaru G_2



$$G_2 - B_2 - S_2 = 0, \qquad B_2 = \frac{G_2}{g}a_2,$$

stąd

stąd

$$S_2 = G_2 - \frac{G_2}{g}a_2 \qquad (3)$$

Ponadto $a_1 = r\varepsilon$ (a)

$a_2 = R\varepsilon$ (b)

Po podstawieniu (1) i (3) do (2) i uwzględnieniu (a) i (b):

$$\varepsilon = \frac{G_2R - \mu G_1 r}{J_z + \frac{G_2}{g}r^2 + \frac{G_1}{g}R^2} = \underline{6.7\ (s^{-2})}$$