SIŁA BEZWŁADNOŚCI - ZASADA d'ALEMBERTA

Równanie dynamiczne ruchu punktu ***i*** układu ***n*** punktów materialnych m_i (***i*=1…*n***)

$$m_i\overline{a}_i = \overline{P}_i + \overline{S}_i \qquad \textbf{(1)}$$

$\overline{P}_i$ – wypadkowa sił zewnętrznych (czynnych i reakcji) działających na punkt ***i***,
$\overline{S}_i$ – siła wewnętrzna (pochodząca od innych punktów układu)

Df. Siła bezwładności (siła d'Alemberta) - fikcyjna siła $\overline{B}_i = -m_i\,\overline{a}_i$

Równanie **(1)** można wtedy zapisać jako

$$\overline{B}_i + \overline{P}_i + \overline{S}_i = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

Po zsumowaniu równań **(2)** dla wszystkich n punktów układu ($\sum\overline{S}_i = 0$, patrz poprzedni wykład):

$$\sum\overline{B}_i + \sum\overline{P}_i = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

lub

$$\overline{B}_s + \sum\overline{P}_i = 0 \qquad \textbf{(3a)}$$

gdzie $\overline{B}_s = \sum\overline{B}_i = -\sum m_i\overline{a}_i = -M\overline{a}_s$

SIŁA BEZWŁADNOŚCI - ZASADA d'ALEMBERTA – c.d.

Po obustronnym pomnożeniu równania ruchu punktu $\boldsymbol{m}_i$ **(2)** przez poprowadzony z obranego bieguna wektor–promień $\overline{\boldsymbol{r}}_i$ tego punktu i zsumowaniu wszystkich równań:

$$\sum(\overline{r}_i \times \overline{B}_i) + \sum(\overline{r}_i \times \overline{P}_i) + \sum(\overline{r}_i \times \overline{S}_i) = 0$$

Ponieważ momenty od sił wewnętrznych znoszą się wzajemnie, tj. $\sum(\overline{r}_i \times \overline{S}_i) = 0$:

$$\sum(\overline{r}_i \times \overline{B}_i) + \sum(\overline{r}_i \times \overline{P}_i) = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

Układ równań wektorowych (3) i (4) przypomina wektorową postać warunków równowagi statyki dla dowolnego układu sił $\overline{\boldsymbol{F}}_i$:

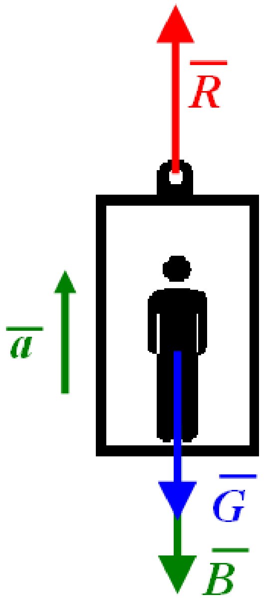
Równanie **(3)**: $\sum \overline{F}_i = 0$

Równanie **(4)**: $\sum \overline{M}_i = 0$

Zasada d'Alemberta: Jeżeli do sił zewnętrznych (czynnych i reakcji) działających na układ punktów materialnych będących w ruchu dodamy odpowiednie fikcyjne siły bezwładności, to układ sił czynnych, reakcji i bezwładności pozostaje w równowadze.

Przykład 1:

Winda o ciężarze G=**7350** N zawieszona na linie porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym tak, że w pierwszych **5 s** przebywa **25 m**. Znaleźć siłę naciągu liny przy ruchu windy (a) w górę, (b) w dół i (c) przy ruchu jednostajnym windy.



(a) ruch jednostajnie przyspieszony w górę

$$\overline{G} + \overline{R} + \overline{B} = 0$$

$$R - G - B = 0$$

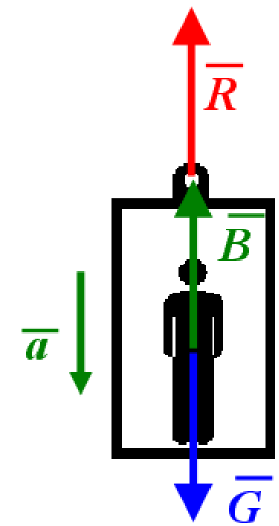
$$a = 2h/t^2 = 2 \cdot 25/\ 5^2 = 2\ \ \mathrm{m/s^2}$$

$$B = ma = (G/g) \cdot a = (7350/9.8) \cdot 2 = 1500\ \mathrm{N}$$

Naciąg liny przy ruchu przyspieszonym w górę wynosi: $R = G + B = 7350 + 1500 = \underline{8850\ \mathrm{N}}$

Przykład 1: c.d.

Winda o ciężarze G=**7350** N zawieszona na linie porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym tak, że w pierwszych **5 s** przebywa **25 m**. Znaleźć siłę naciągu liny przy ruchu windy (a) w górę, (b) w dół i (c) przy ruchu jednostajnym windy.



(b) ruch jednostajnie przyspieszony w dół:

$$\overline{G}+\overline{R}+\overline{B}=0$$

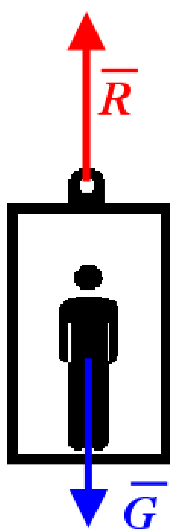
$$R-G+B=0$$

$$a=2h/t^2=2\cdot 25/\,5^2=2\ \ \mathrm{m/s^2}$$

$$B=ma=(G/g)\cdot a=(7350/9.8)\cdot 2=1500\ \mathrm{N}$$

Naciąg liny przy ruchu przyspieszonym w dół wynosi: $R=G-B=7350-1500=\underline{5850\ \mathrm{N}}$

(c) ruch jednostajny (w górę lub w dół):



$$a=0\Rightarrow B=0$$

$$R=G=7350\ \mathrm{N}$$

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI CIAŁA SZTYWNEGO

Df. Moment bezwładności układu punktów materialnych o masie $\boldsymbol{m}_i$ ($\boldsymbol{i}$**=1, ...**$\boldsymbol{n}$) względem osi $\boldsymbol{l}$

$$J_l = \sum m_i r_i^2$$

gdzie $\boldsymbol{r}_i$ – odległość punktu $\boldsymbol{i}$ od prostej

Moment bezwładności ciała sztywnego względem osi $\boldsymbol{l}$

$$J_l = \iiint_V \rho^2 dm$$

gdzie $\boldsymbol{\rho}$ – odległość nieskończenie małego elementu bryły o masie **d*m*** od prostej $\boldsymbol{l}$

V – objętość bryły

$J \geq 0$,

Wymiar *J*: jedn. masy · (jedn. długości)^2 (np. $kg \cdot m^2$ – jednostka podstawowa układu SI)

Df. promień bezwładności bryły względem prostej $\boldsymbol{l}$

$$i_l = \sqrt{\frac{J_l}{M}},$$

gdzie M – masa całej bryły: $M = \sum m_i$

Przykład 2:

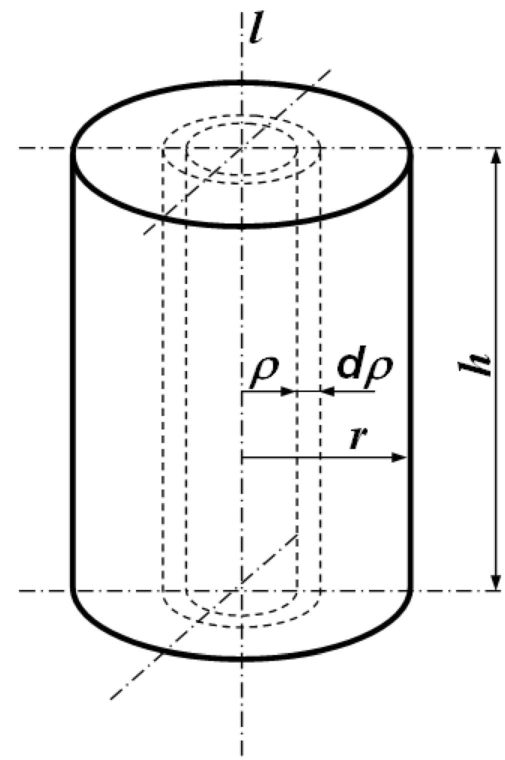
Obliczyć moment bezwładności ***J*** oraz promień bezwładności ***i*** walca o promieniu ***r*** i masie *M* względem jego osi ***l***.

$$dm = \gamma \cdot dV = \gamma \cdot h \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho$$

γ - masa właściwa

$$J_l = \int_0^r \rho^2 \gamma \cdot h \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi\gamma h \cdot \frac{r^4}{4} = M\,\frac{r^2}{2}$$

$$i_l = \sqrt{\frac{Mr^2}{2M}} \approx 0.7r$$



Df. Moment zamachowy

Średnica bezwładności $\boldsymbol{D=2i}$

$$J_l = Mi^2 = \frac{MD^2}{4} = \frac{GD^2}{4g}$$

Stąd **moment zamachowy** $\boldsymbol{GD^2 = 4g\, J_l}$

<u>**Df.**</u> Masą zredukowaną bryły na daną odległość $\boldsymbol{r}$ od prostej $\boldsymbol{l}$ nazywamy taką masę M_z skupioną w punkcie o odległości $\boldsymbol{r}$ od prostej $\boldsymbol{l}$, której moment bezwładności względem prostej $\boldsymbol{l}$ jest równy momentowi bezwładności bryły względem tej prostej.

$\boldsymbol{J_1 = M_z\, r^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\boldsymbol{M_z = J_1/r^2}}$

<u>Przykład:</u>

M_z walca pełnego o masie M zredukowana do promienia walca wynosi

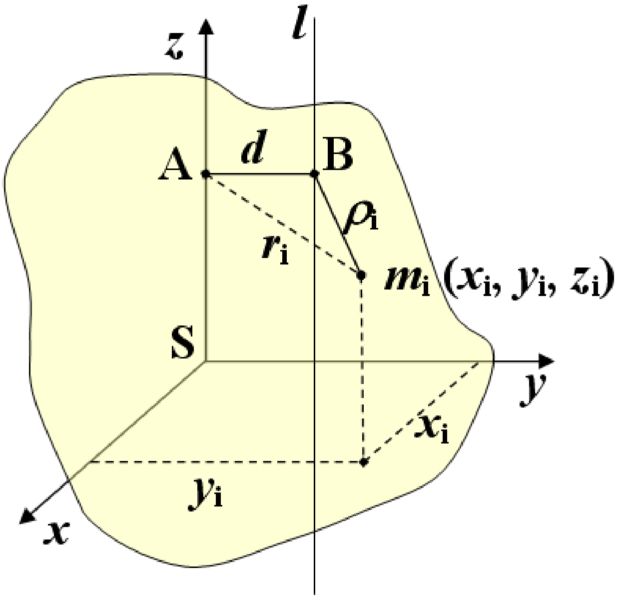
$$\boldsymbol{M_z = (Mr^2/2)/r^2 = M/2}$$

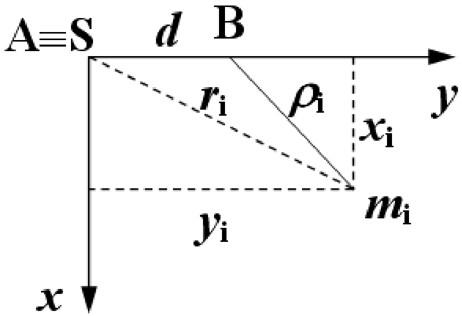
Wykorzystanie: skupienie masy na obwodzie a nie w tarczy koła zamachowego

Twierdzenie Steinera

Założenie: oś z przechodzi przez środek masy S układu punktów materialnych (p.m.)

l – prosta $\parallel z$
r_i – odległość p.m. m_i od z
ρ_i – odległość p.m. m_i od l





$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$

$\rho_i^2 = x_i^2 + (y_i - d)^2 = r_i^2 + d^2 - 2y_i d$

$J_z = J_s = \sum m_i r_i^2$

$J_l = \sum m_i \rho_i^2 = \sum m_i r_i^2 + d^2 \sum m_i - 2d \sum m_i y_i$

Ale $\sum m_i y_i = My_s = 0$ ponieważ $y_s = 0$ oraz $\sum m_i = M$, stąd

$$\boxed{J_l = J_s + Md^2}$$

PRACA, MOC, SPRAWNOŚĆ, ENERGIA

Praca

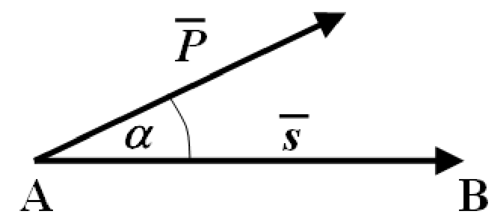
Df. Praca siły $\overline{P}$ stałej co do wartości i kierunku na prostoliniowym przesunięciu $\overline{s}$ jest iloczynem skalarnym wektora siły i wektora przesunięcia punktu jej przyłożenia

$$\boxed{L = \overline{P}\cdot\overline{s} = P\cdot s\cdot\cos\left(\overline{P}, \overline{s}\right)}$$

$\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad L = P\cdot s$

$\alpha=90° \quad\Rightarrow\quad L = 0$

$\alpha=180° \quad\Rightarrow\quad L = -P\cdot s$

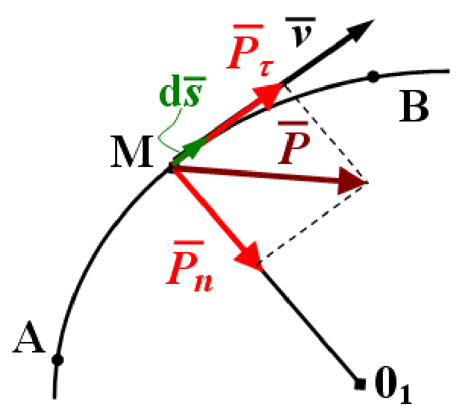


Praca c.d.

1. Punkt przyłożenia zmiennej co do wartości i kierunku siły ***P*** przemieszcza się po krzywoliniowym torze od A do B.

Elementarna praca stałej siły na nieskończenie małym przemieszczeniu d***s***

$$\delta L = P \cdot ds \cdot \cos(\overline{P}, \overline{\tau}) = P_\tau \cdot ds$$

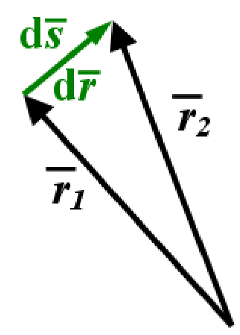


$$L = \sum_{i=1}^{\infty} \delta L = \int_A^B P_\tau \cdot ds = \int_A^B P_\tau \cdot v \cdot dt$$

Alternatywnie

$d\overline{s} = d\overline{r}$, $\quad d\overline{r}\,(dx, dy, dz)$

$$\delta L = \overline{P} \cdot d\overline{r} = P_x dx + P_y dy + P_z dz$$



$$L = \int_A^B \left(P_x dx + P_y dy + P_z dz\right)$$

(całka krzywoliniowa!)

lub

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left(P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z}\right) dt$$

Praca c.d.

Przykład: Praca siły ciężkości działającej na punkt **M** na przemieszczeniu AB.

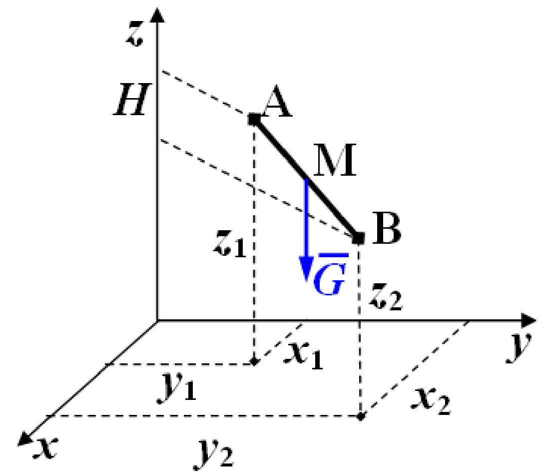
$\overline{G}\,(0,\,0,\,-G)$

$\delta L = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -G dz$

$$L = \int_{z_1}^{z_2} -G dz = -G(z_2 - z_1) = GH$$

$z_1 > z_2 \quad \Rightarrow \quad L > 0$

$z_1 < z_2 \quad \Rightarrow \quad L < 0$



<u>Praca</u> c.d.

2. Praca sił w ruchu ciała sztywnego pod wpływem sił $\overline{P}_1 \ldots \overline{P}_n$

<u>(a) ruch postępowy</u>

$d\overline{r}_i = d\overline{r}$

$\delta L_i = \overline{P}_i \cdot d\overline{r}$ – **praca siły P_i**

$\delta L = \sum \delta L_i = \sum \overline{P}_i \cdot d\overline{r} = d\overline{r} \cdot \sum \overline{P}_i$

$\sum \overline{P}_i = \overline{W}$ – **wektor główny**

$\delta L = \overline{W} \cdot d\overline{r}$

$$L = \int_I^{II} \overline{W} \frac{d\overline{r}}{dt} \cdot dt = \int_I^{II} \overline{W} \cdot \overline{v} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(W_x \dot{x} + W_y \dot{y} + W_z \dot{z} \right) dt$$

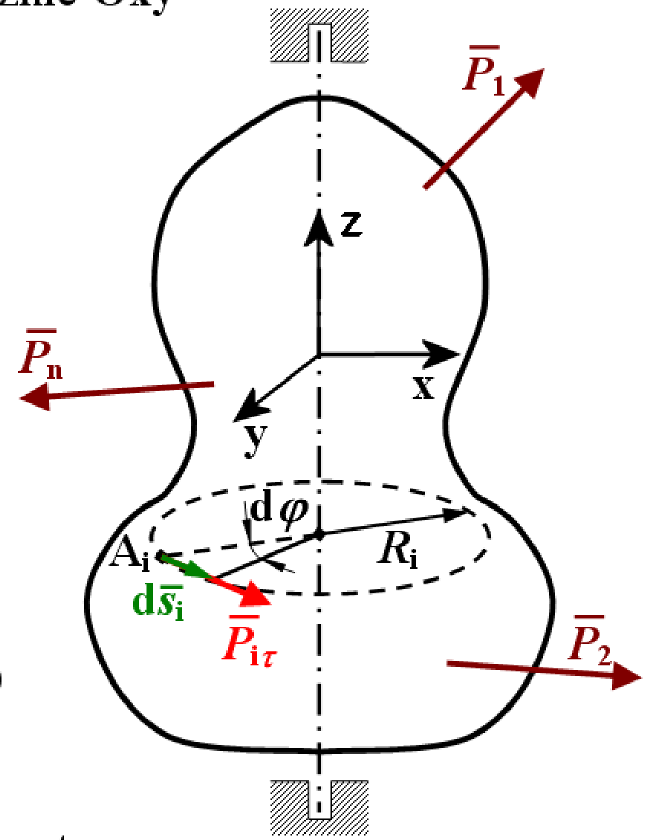
$$\boxed{L = \int_I^{II} \overline{W} \cdot d\overline{r} = \int_I^{II} \left(W_x dx + W_y dy + W_z dz \right)}$$

Praca c.d.

2. Praca sił w ruchu ciała sztywnego pod wpływem sił $\overline{P}_1 \ldots \overline{P}_n$

(b) ruch obrotowy

Punkt przyłożenia siły $\overline{P}_i$ opisuje okrąg o promieniu R_i w płaszczyźnie **Oxy**



$M_{iz} = P_{i\tau} \cdot R_i$

$\mathbf{d}s_i = R_i \, \mathbf{d}\varphi$

$\overline{P}_i \, (P_{i\tau}, P_{in}, P_{iz})$

Elementarna praca siły $\overline{P}_i$ na przemieszczeniu $\mathbf{d}\overline{s}_i$

$\delta L_i = P_{i\tau} \cdot \mathbf{d}s_i = P_{i\tau} R_i \, \mathbf{d}\varphi = M_{iz} \, \mathbf{d}\varphi$

Elementarna praca wszystkich sił $P_1 \ldots P_n$ na przemieszczeniu $\mathbf{d}s_i$

$\delta L = \sum \delta L_i = \mathbf{d}\varphi \sum M_{iz}$

$\sum M_{iz} = M_z$ (suma momentów wszystkich sił względem osi obrotu)

$\delta L = M_z \, \mathbf{d}\varphi$

Jeżeli przy obrocie ciała wartość kąta obrotu zmienia się od φ_1 do φ_2 to:

$$\boxed{L = M_z \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M_z(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

MOC SIŁY, SPRAWNOŚĆ

Df. Moc siły – zmiana pracy siły odniesiona do jednostki czasu

$$N = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overline{P}d\overline{r}\right) = \frac{\overline{P}\cdot d\overline{r}}{dt} = \overline{P}\cdot\overline{v}$$

Wniosek: **Moc** = iloczynowi skalarnemu wektora siły i wektora prędkości punktu jej przyłożenia.

Jeżeli $\overline{P} \parallel \overline{v}$ to $N = Pv$

Ruch obrotowy ze stałym momentem M_z

$$N = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z\omega$$

$L = L_u + L_o$

L_u – praca użyteczna

L_o – praca oporów

Sprawność: $\eta = L_u / L = N_u / N;$ $\eta < 1$

ENERGIA KINETYCZNA

(a) Energia kinetyczna punktu

$$m\ddot{x} = P_x; \qquad m\ddot{y} = P_y; \qquad m\ddot{z} = P_z; \qquad \bar{P} = \sum \bar{P}_i$$

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z} \qquad \text{(a)}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) \qquad \text{(b)}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{(a)} \Rightarrow \quad & (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{m}(P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z}) \\ \text{(b)} \Rightarrow \quad & (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dt} \end{aligned}\right] \Rightarrow \boxed{\frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt} = P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z}}$$

Energia kinetyczna punktu c.d.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}{dt}\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(P_x\dot{x}+P_y\dot{y}+P_z\dot{z}\right)dt$$

dla $\boldsymbol{t = t_1 \rightarrow v = v_1}$ dla $\boldsymbol{t = t_2 \rightarrow v = v_2}$

$$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=L$$

Energia kinetyczna: $\boxed{E=\frac{1}{2}mv^2}$

Zasada równowartości energii kinetycznej i pracy: $\boxed{\boldsymbol{E_2 - E_1 = L}}$

Przyrost energii kinetycznej w pewnym odstępie czasu równy jest pracy sił zewnętrznych (czynnych i reakcji) działających w tym czasie.

<u>**Wnioski:**</u> gdy $\boldsymbol{L=0}$ to $\mathbf{E_2 - E_1 = 0} \Rightarrow$ $\mathbf{v_1=v_2=const}$ co do wartości (ruch jednostajny)

Np. gdy $\boldsymbol{\bar{P}}$**=const** i $\boldsymbol{\bar{P}}\perp$ **toru** ($\mathbf{d\bar{s}}$, $\mathbf{\bar{v}}$) w czasie jednostajnego ruchu po okręgu.

(b) Energia kinetyczna ciała sztywnego

__Ruch postępowy__

$v_i = v$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v^2; \qquad M = \sum m_i}$$

__Ruch obrotowy__

$$E = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i r_i^2 \omega_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2 , \qquad \omega_i = \omega$$

Ponieważ moment bezwładności względem osi obrotu: $J_z = \sum m_i r_i^2$

Ostatecznie:

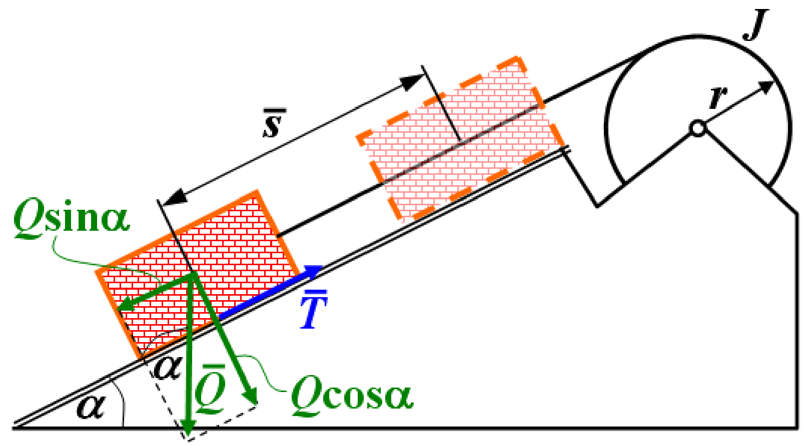
$$\boxed{E = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}}$$

Przykład

Ciężar $\bar{Q}$ zawieszony na linie przerzuconej przez krążek zaczyna się poruszać po równi pochyłej o kącie nachylenia α. Obliczyć prędkość ciężaru $\bar{Q}$ po przebyciu drogi s, jeżeli wiadomo, że współczynnik tarcia między równią a ciężarem wynosi μ, promień krążka r, a jego moment bezwładności względem osi obrotu J. Tarcie w łożyskach krążka pominąć.

$\boldsymbol{E_2 - E_1 = L}$

$$E_1 = 0\,; \qquad E_2 = \frac{Q}{2g}v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2\,; \qquad \omega = \frac{v}{r}$$



$$E_2 = \frac{Q}{2g}v^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

$$L = (Q\sin\alpha - T)s\,; \quad T = \mu N = \mu Q\cos\alpha$$

Stąd: $L = (Q\sin\alpha - \mu Q\cos\alpha)s$

Z zasady równowartości energii kinetycznej i pracy: $\boldsymbol{E_2 - E_1 = L}$

$$E_2 = \frac{Q}{2g}v^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2 = (Q\sin\alpha - \mu Q\cos\alpha)s$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2Qs(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\frac{Q}{g} + \frac{J}{r^2}}}}$$