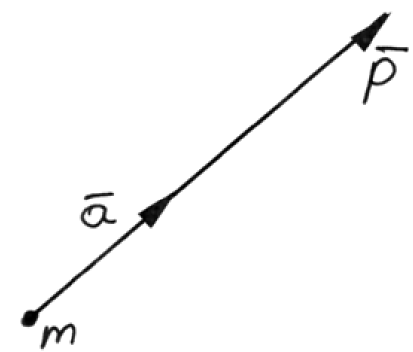
DYNAMIKA

Badanie ruchu ciał jako skutku działania sił.

Zasady dynamiki Newtona

I. Jeżeli na swobodny punkt materialny nie działają żadne siły lub układ sił działających pozostaje w równowadze, to punkt materialny porusza się ruchem jednostajnym lub pozostaje w spoczynku.

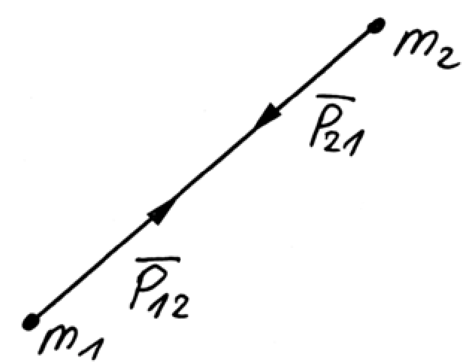
II. Jeżeli na swobodny punkt materialny działa siła, to nadaje mu ona przyspieszenie proporcjonalne do wartości tej siły, o tym samym kierunku i zwrocie.



$$\overline{P} = m\,\overline{a}$$

Współczynnik proporcjonalności $\boldsymbol{m}$ – masa punktu materialnego

III. Jeżeli punkt materialny o masie m_1 działa na punkt materialny o masie m_2 z pewną siła $\boldsymbol{P_{12}}$, to punkt o masie m_2 działa na punkt pierwszy z siłą $\boldsymbol{P_{21}}$ równą co do wartości, lecz przeciwnie zwróconą.



Zasada niezależności działania sił (zasada superpozycji)

Działanie na punkt materialny środkowego układu sił jest równoważne działanie siły wypadkowej tego układu.

$\Downarrow$

Przyspieszenie wywołane geometryczną sumą sił jest równe geometrycznej sumie przyspieszeń wywołanych przez poszczególne siły.

$$m\bar{a}_1 = \bar{P}_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m\bar{a}_n = \bar{P}_n$$

$$+\underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$m(\bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_n) = \bar{P}_1 + \ldots + \bar{P}_n$$

lub

$$m\bar{a} = \bar{W}$$

gdzie: $\bar{a} = \bar{\sum} a_i$; $\bar{W} = \sum \bar{P}_i$

Siła ciężkości nadaje swobodnemu punktowi materialnemu przyspieszenie $g = 9.81\ m/s^2$

$$\boxed{\bar{G} = m\bar{g}}$$

Dynamika swobodnego punktu materialnego

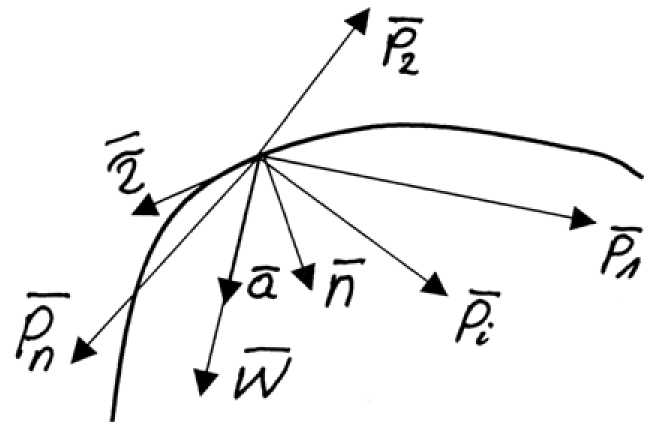
Dynamiczne równania ruchu punktu materialnego

1. we współrzędnych prostokątnych

$m\ddot{x}=P_{1x}+...+P_{nx}=\sum P_{ix}$

$m\ddot{y}=P_{1y}+...+P_{ny}=\sum P_{iy}$

$m\ddot{z}=P_{1z}+...+P_{nz}=\sum P_{iz}$



2. we współrzędnych naturalnych

$m\,a\cos(\overline{a},\overline{\tau})=\sum P_i\cos(\overline{P}_i,\overline{\tau})$

$m\,a\cos(\overline{a},\overline{n})=\sum P_i\cos(\overline{P}_i,\overline{n})$

stąd:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}P_i\cos\left(\overline{P}_i,\overline{\tau}\right)$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=\sum_{i=1}^{n}P_i\cos\left(\overline{P}_i,\overline{n}\right)$$

<u>Podstawowe zagadnienia dynamiki</u>

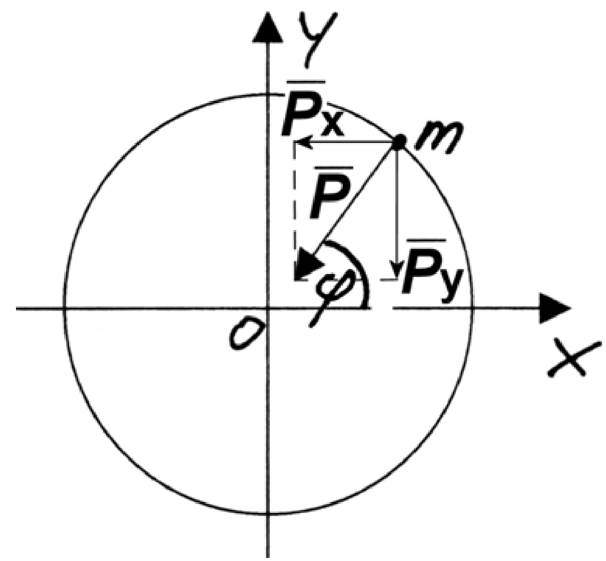
1. <u>Dane</u>: masa i równanie toru punktu materialnego.
   <u>Wyznaczyć:</u> wektor wypadkowej siły działającej na ten punkt.
2. <u>Dane</u>: masa i siły działające na punkt materialny oraz warunki początkowe.
   <u>Wyznaczyć:</u> równanie ruchu punktu.

<u>Przykład 1</u>

Mając dane równanie ruchu punktu ***M*** o masie ***m*** w postaci:

$\boldsymbol{x = r\cos\omega t,\ \ y = r\sin\omega t}$.

Znaleźć siłę wypadkową przyłożoną do tego punktu.



Równanie toru:

$x^2 + y^2 = r^2$

$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad P_x = m\ddot{x} = -mr\omega^2\cos\omega t$

$\dot{y} = r\omega\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -r\omega^2\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad P_y = m\ddot{y} = -mr\omega^2\sin\omega t$

$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = mr\omega^2$

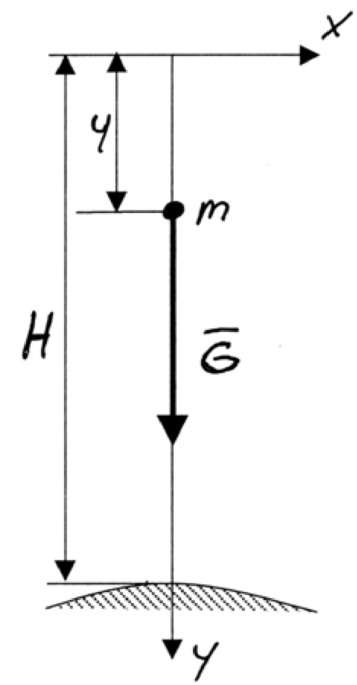
$\cos(\overline{P}, \overline{i}) = P_x/P = -\cos\omega t = -\cos\varphi$

$\cos(\overline{P}, \overline{j}) = P_y/P = -\sin\omega t = -\sin\varphi$

Siła $\overline{P}$ jest stale skierowana do początku układu współrzędnych (środka okręgu).

Przykład 2

Znaleźć równanie ruchu punktu swobodnego pod działaniem siły ciężkości, który spada z wysokości H jeżeli w chwili $\boldsymbol{t=0}$, $\boldsymbol{y=0}$, $\boldsymbol{v_y=0}$.



Równanie różniczkowe ruchu:

$m\ddot{y}=mg$, stąd $\ddot{y}=g$

Całkujemy dwukrotnie:

$\boldsymbol{v_y=\dot{y}=gt+C_1}$,
$\boldsymbol{y=gt^2/2+C_1t+C_2}$

Wyznaczamy stałe całkowania z warunków początkowych:

$\boldsymbol{v_y(t=0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0}$

$\boldsymbol{y(t=0)=0 \quad \Rightarrow \quad C_2=0}$

stąd $\boldsymbol{v_y=gt}$; $\boldsymbol{y(t)=gt^2/2}$

Czas spadania z wysokości H: $t=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

Prędkość końcowa: $v=\sqrt{2gH}$

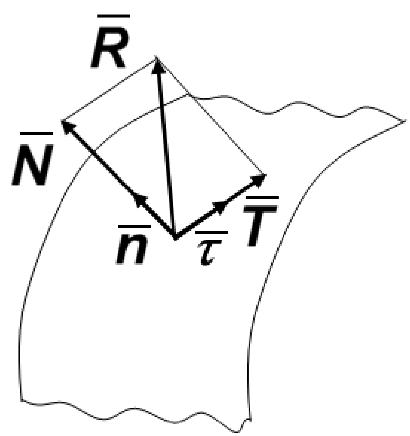
Dynamika nieswobodnego punktu materialnego

Df.: patrz wykład ze Statyki

Aksjomat: Nieswobodny punkt materialny można rozpatrywał jako punkt swobodny, jeżeli do sił czynnych dodamy reakcje więzów.

Więzy <u>idealne</u>: siły reakcji $||$ do wektora $\overline{n}$ krzywej lub powierzchni. Wówczas krzywa lub powierzchnia jest <u>idealnie gładka</u>.

Więzy <u>rzeczywiste</u>: siły reakcji **nie są** $||$ do wektora $\overline{n}$. Wówczas krzywa lub powierzchnia jest <u>chropowata</u>. Składowa reakcji na kierunek $\overline{\tau}$ - <u>siła tarcia</u>.



Przykład 3:

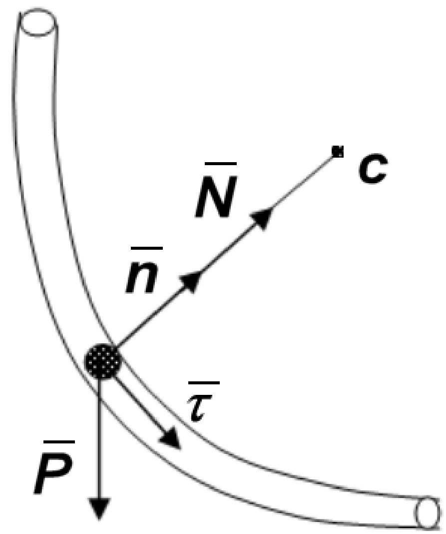
Dynamiczne równania ruchu po krzywej płaskiej idealne gładkiej, np. kulka w krzywoliniowej rurce.

Dane: P, m szukane: równanie toru punktu, reakcja N

$$m\overline{a} = \overline{P} + \overline{N}$$

lub

$$ma_\tau = P_\tau$$
$$ma_n = P_n + N$$



czyli:

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = P_\tau \qquad ①$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = P_n + N \qquad ②$$

Całkując ① $\Rightarrow$ $v(t) = \frac{ds}{dt}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{s = s(t)}$.

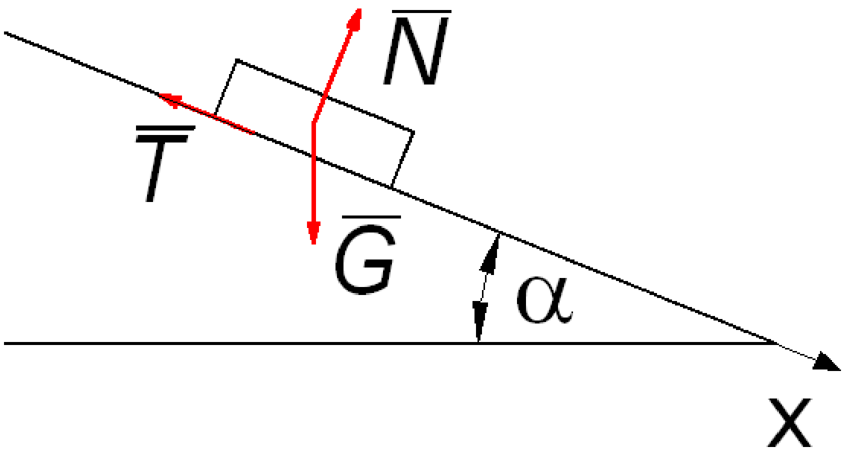
Podstawiając $\boldsymbol{v(t)}$ do ② $\Rightarrow$ wartość reakcji N

Przykład 4:

Ciało o ciężarze $\overline{G}$ porusza się w dół po chropowatej równi pochyłej pochylonej do poziomu pod kątem α według równania $x = bgt^2$, gdzie g – przyspieszenie ziemskie b – stała. Wyznaczyć wartość siły tarcia (T).

Równanie dynamiczne ruchu:

$$m\overline{a} = \overline{G} + \overline{N} + \overline{T}$$



wzdłuż osi x:

$$m\ddot{x} = G\sin\alpha - T$$

Ponieważ $\ddot{x} = 2bg$; $m = G/g$,

$$(G/g)2bg = G\sin\alpha - T \quad \Rightarrow \quad T = G(\sin\alpha - 2b)$$

DYNAMIKA UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

Df. Układ punktów materialnych (u.p.m.) – zbiór punktów, w których położenie każdego punktu zależy od położeń innych punktów.

Środek masy u.p.m. jest to punkt o współrzędnych

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \quad \overline{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Zasada ruchu środka masy u.p.m.

Dynamiczne równanie ruchu punktu ***i***:

$$m_i \overline{a}_i = \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2} = \overline{P}_i + \overline{R}_i + \overline{S}_i$$

$\overline{P}$ – siła czynna; $\overline{R}$ – siła reakcji; $\overline{S}$ – siła wewnętrzna

Sumujemy stronami wszystkie równania:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i \quad \text{ale} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left(\overline{r}_s \sum_{i=1}^{n} m_i \right) = M \frac{d^2 \overline{r}_s}{dt^2}$$

gdzie $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$

$\sum \overline{S}_i = 0$ (III zasada dynamiki Newtona)

Oznaczając: $\sum \overline{P}_i = \overline{W}$; $\sum \overline{R}_i = \overline{W}_R$ dostajemy: $M \dfrac{d^2 \overline{r}_s}{dt^2} = \overline{W} + \overline{W}_R$ lub $M \overline{a}_s = \overline{W} + \overline{W}_R$

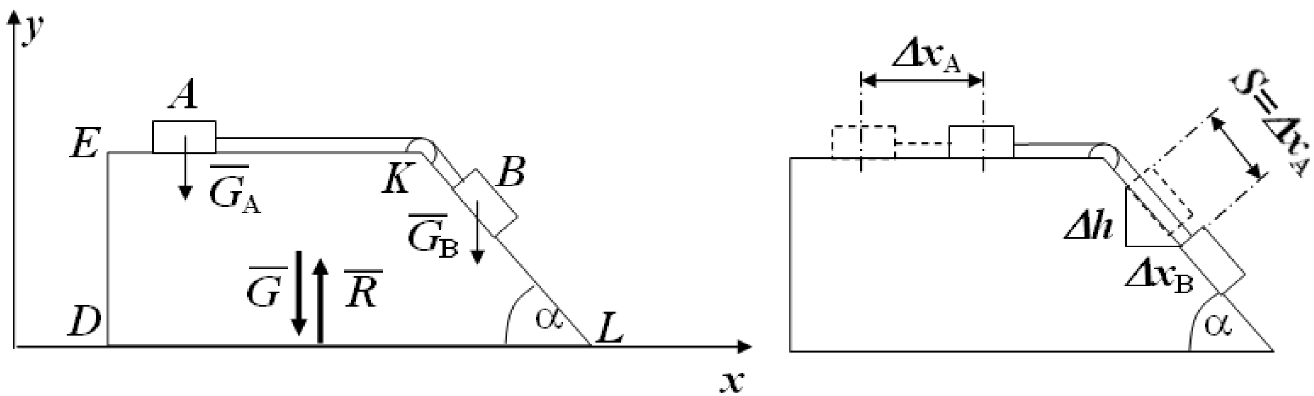
lub skalarnie: $M\ddot{x}_s = W_x + W_{Rx}$; $M\ddot{y}_s = W_y + W_{Ry}$; $M\ddot{z}_s = W_z + W_{Rz}$

Środek masy porusza się jak swobodny punkt materialny o masie równej masie całego układu pod działaniem sumy sił czynnych i reakcji.

Jeżeli $\overline{W} + \overline{W}_R = 0$ **, to środek masy pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.**

Przykład 5

Po nachylonej gładkiej równi **KL** ściętego graniastosłupa **DEKL** opuszcza się ciało **B** wprawiając w ruch przy pomocy bezmasowej i nierozciągliwej linki ciało **A**. Znaleźć, o ile przesunie się graniastosłup po idealnie gładkiej poziomej płaszczyźnie (***Δx=?***), jeżeli ciało **B** obniży się o ***Δh***.

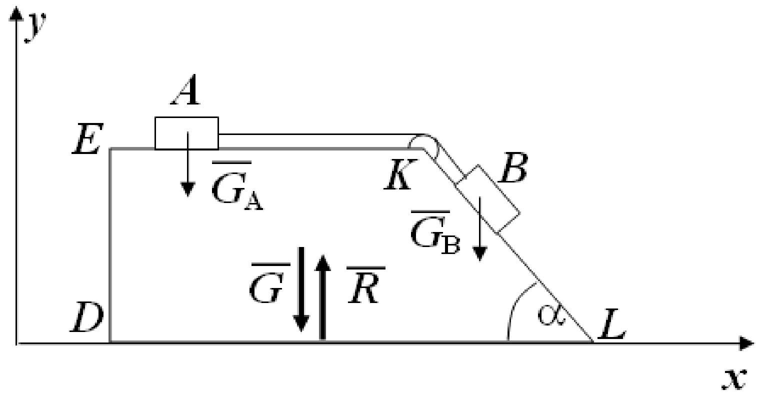


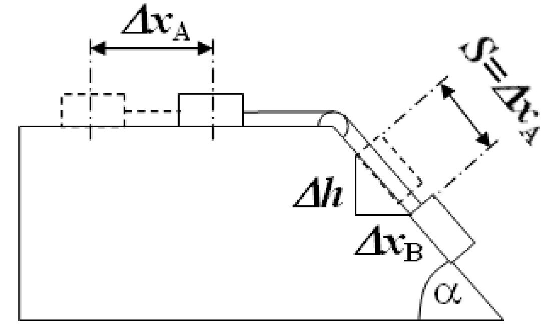
$$\overline{\mathbf{W}}=\overline{\mathbf{W}}+\overline{\mathbf{W}}_R=\overline{\mathbf{G}}_A+\overline{\mathbf{G}}_B+\overline{\mathbf{G}}+\overline{\mathbf{R}}=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{M}\ddot{x}_S=0 \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_S=\mathbf{C}$$

Zakładamy: $t=0\ \dot{x}_S=0 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{C}=0$

Stąd $\mathbf{M}x_S=\mathbf{const}$: tzn. x_S nie zależy od przemieszczenia poszczególnych mas układu i ma wartość stałą.

$$Mx_S = \sum_{i=1}^{3} m_i x_i$$





$t=t_1$: $Mx_S = \sum_{i=1}^{3} m_i x_{1i}$

t=t$_2$: $Mx_S = \sum_{i=1}^{3} m_i x_{2i} \quad /\cdot(-1)$

+

$$0 = \sum_{i=1}^{3} m_i \left(x_{2i} - x_{1i}\right)$$

$x_{2i} - x_{1i} = \Delta x_i$

$m_A \Delta x_A + m_B \Delta x_B + m\Delta x = 0$, Δx – przemieszczenie graniastosłupa

$$\Delta x = -\frac{1}{m}\left(m_A \Delta x_A + m_B \Delta x_B\right) = -\frac{1}{m}\left(m_A \frac{\Delta h}{\sin\alpha} + m_B \Delta h ctg\,\alpha\right)$$

kierunek Δx przeciwny do Δx_A i Δx_B!