KINEMATYKA BRYŁY

Liczba stopni swobody - liczba niezależnych współrzędnych potrzebnych do określenia położenia punktu lub bryły w przestrzeni

Punkt poruszający się swobodnie w przestrzeni: 3 stopnie swobody (x,y,z)

Punkt poruszający się po pewnej powierzchni F(x,y,z)=0: 2 stopnie swobody. (Współrzędne punktu w czasie ruchu muszą spełniać równanie tej powierzchni, a więc tylko 2 współrzędne są niezależne.)

Punkt poruszający się po pewnej linii (krzywej lub prostej): 1 stopień swobody. (Linia wynika z przecięcia 2 powierzchni.)

Ogólnie liczba stopni swobody układu punktów materialnych: $\mathbf{s = 3n - k}$

k - liczba niezależnych równań, n – liczba punktów układu.

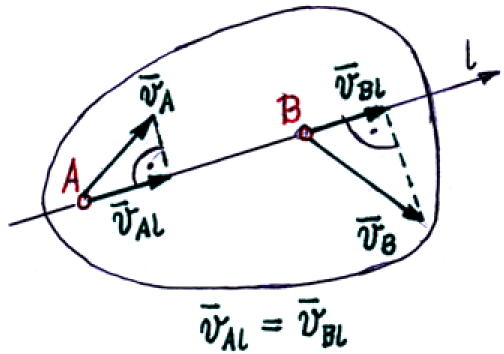
Położenie bryły w przestrzeni określają 3 punkty nie leżące na jednej prostej.
Do położenia 3 punktów potrzeba $3 \times 3 = 9$ współrzędnych. Z definicji bryły jako ciała sztywnego wynika, że odległości między tymi punktami muszą być stałe, tzn. w czasie ruchu muszą być spełnione 3 równania:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = a^2$$
$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = b^2$$
$$(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2 = c^2$$

Wniosek: **Bryła poruszająca się swobodnie w przestrzeni ma** 9 – 3 = **6 stopni swobody**.

Twierdzenie:

W bryle sztywnej podczas dowolnego jej ruchu rzuty wektorów prędkości dwóch dowolnych jej punktów na prostą łącząca te punkty są sobie równe.



$$\overline{v_{Al}} = \overline{v_{Bl}}$$

Dowód: gdyby prędkości $\overline{v_{Al}}$ i $\overline{v_{Bl}}$ były różne, to w czasie ruchu odległość między punktami A i B zmieniałaby się, co nie może mieć miejsca w ciele sztywnym.

RUCH POSTĘPOWY BRYŁY

Df. Prosta łącząca dwa dowolne punkty bryły przemieszcza się równolegle.

Ruch postępowy może być prostoliniowy (każdy punkt bryły porusza się po torze prostoliniowym) lub krzywoliniowy.

<u>Twierdzenie:</u> Jeżeli bryła porusza się ruchem postępowym, to wszystkie jej punkty poruszają się po torach przystających i w każdej chwili *t* mają te same wektory prędkości i przyspieszenia.

Dowód:

Z df. ruchu postępowego i ciała sztywnego:

$AB \,||\, A_1B_1,\ \ AB = A_1B_1 \rightarrow \overline{\rho} = \text{const}$

$$\overline{r_B}(t) = \overline{r_A}(t) + \overline{\rho}$$

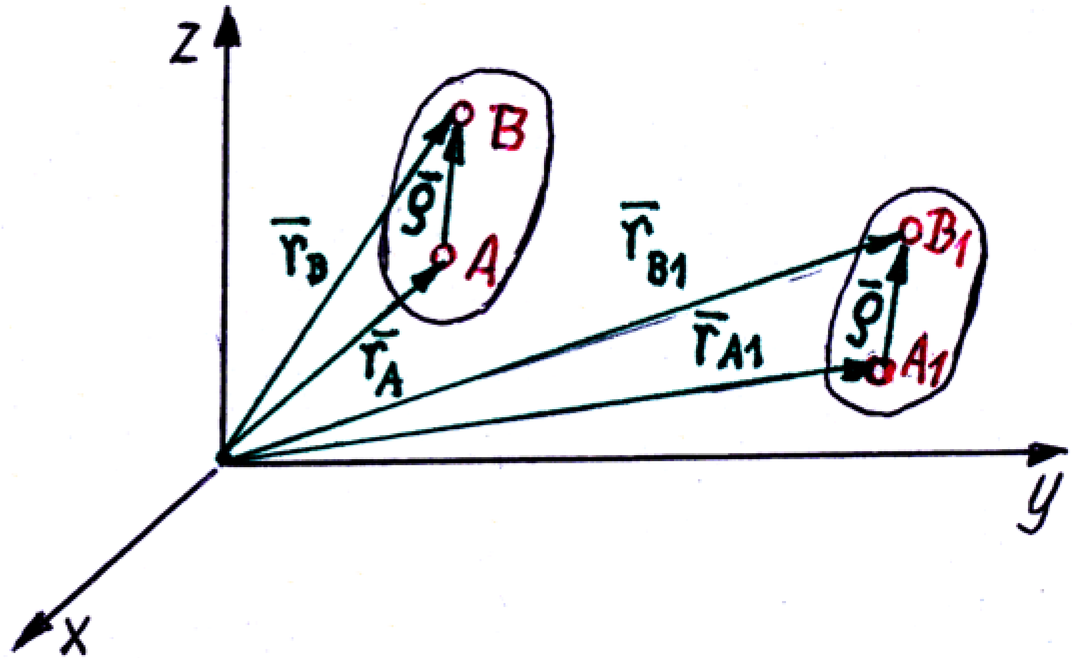
$$\frac{d\overline{r_B}}{dt} = \frac{d\overline{r_A}}{dt} + \frac{d\overline{\rho}}{dt}$$

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = 0$$

$$\overline{v_A} = \overline{v_B}$$

$$\frac{d\overline{v_B}}{dt} = \frac{d\overline{v_A}}{dt}$$

$$\overline{a_B} = \overline{a_A}$$



Wniosek: ruch postępowy bryły jest w pełni określony jeżeli znamy ruch dowolnego jej punktu.

Bryła w ruchu postępowym może mieć 1, 2 lub 3 stopnie swobody (podobnie jak punkt).

RUCH OBROTOWY BRYŁY

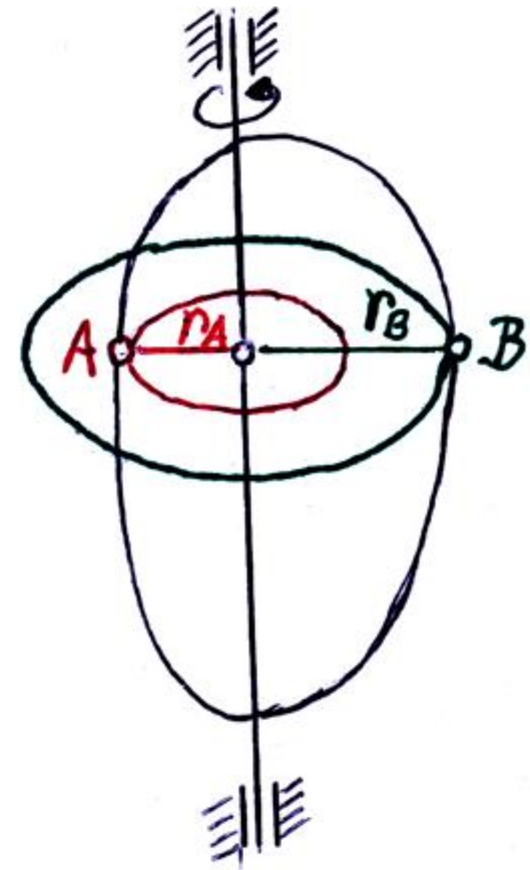
Df. Wszystkie punkty bryły poruszają się po okręgach o środkach na jednej prostej zwanej osią obrotu.

Prędkości kątowe i przyspieszenia kątowe wszystkich punktów bryły są w danej chwili jednakowe.

Prędkość liniowa punktu zależy od jego odległości od osi obrotu.

$v_K = \omega \cdot r_K$

Punkty na osi obrotu są nieruchome.



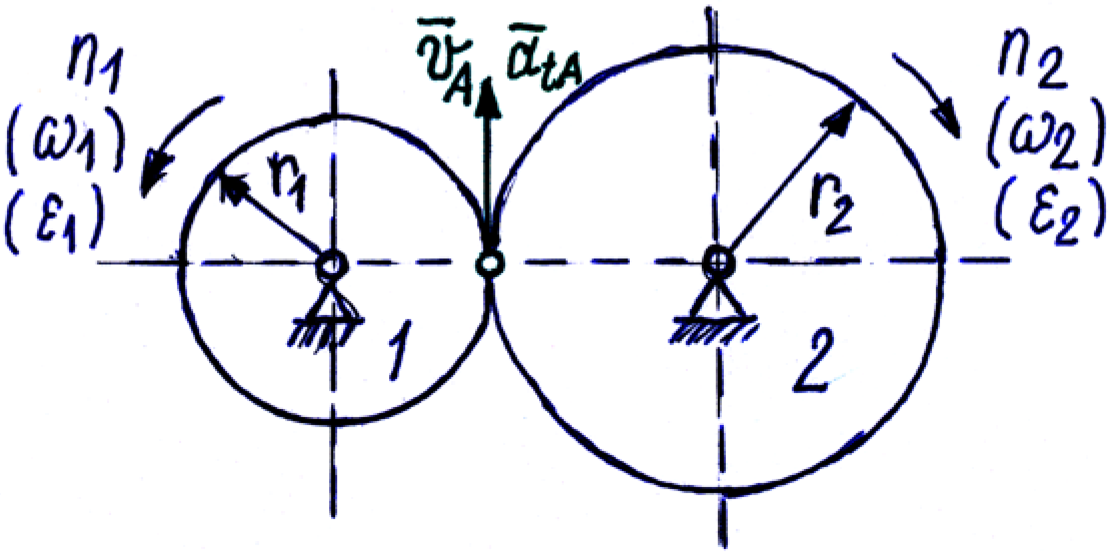
Przekładnia zębata lub cierna

$v_A = \omega_1 \cdot r_1$

$v_A = \omega_2 \cdot r_2$

$a_{tA} = \varepsilon_1 \cdot r_1$

$a_{tA} = \varepsilon_2 \cdot r_2$



Przełożenie przekładni

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

r – promień koła ciernego (promień podziałowy koła zębatego)

z – liczba zębów koła zębatego

n – liczba obrotów na jednostkę czasu

ω – prędkość kątowa (s^{-1})

ε – przyspieszenie kątowe

Przekładnia pasowa

$v_A = v_B = v_p$

(indeks „p" dotyczy pasa)

$v_A = \omega_1 \cdot r_1$

$v_B = \omega_2 \cdot r_2$

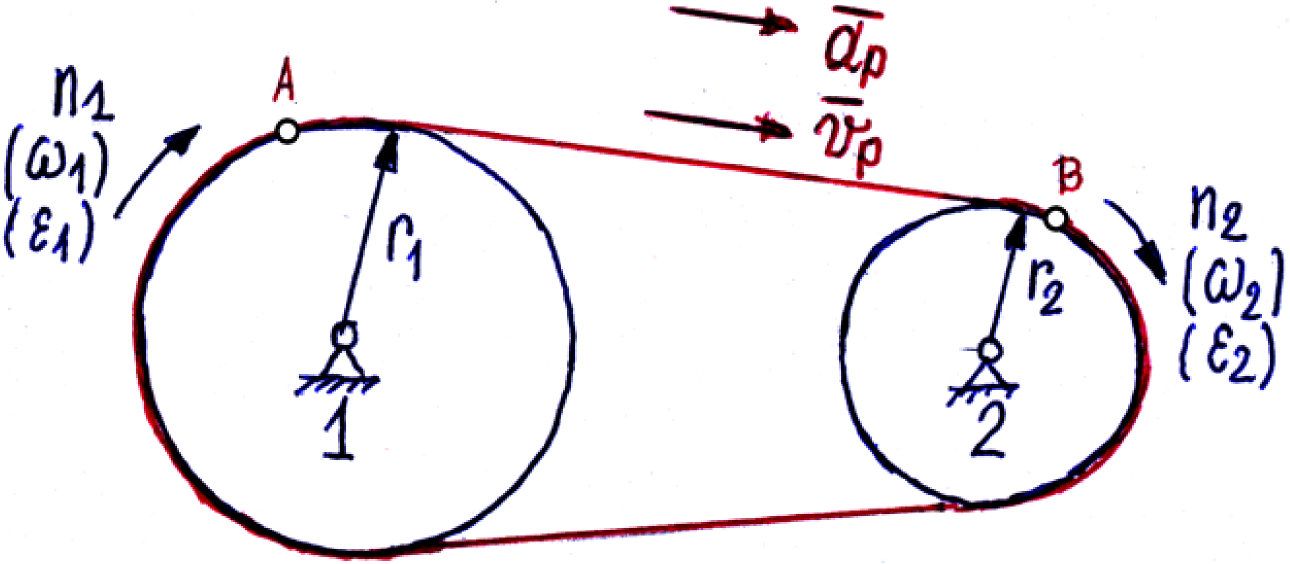
$\omega_1 \cdot r_1 = \omega_2 \cdot r_2$

$a_{tA} = a_p = a_{tB}$

$a_{tA} = \varepsilon_1 \cdot r_1$

$a_{tB} = \varepsilon_2 \cdot r_2$

$\varepsilon_1 \cdot r_1 = \varepsilon_2 \cdot r_2$



Przełożenie przekładni

$$i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$