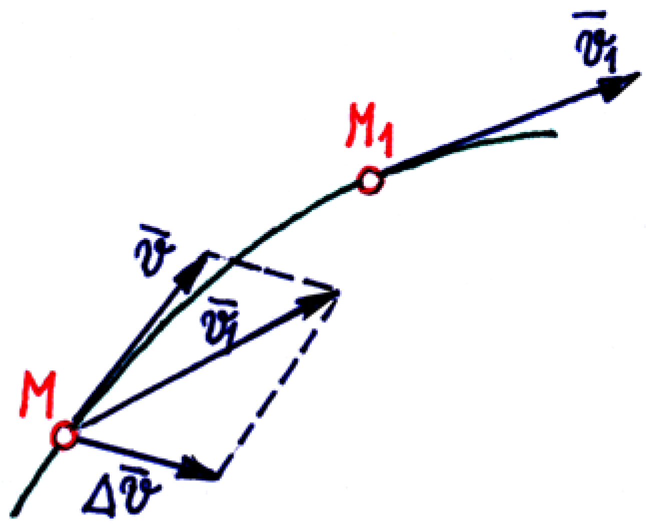
PRZYSPIESZENIE PUNKTU

1. W wektorowym opisie ruchu

Przyspieszenie średnie między położeniem punktu M i M_1:

$$\overline{a_{śr}} = \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t}$$



Definicja przyspieszenia (chwilowego):

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2}$$

2. W opisie ruchu równaniami skończonymi

$$\bar{r} = \bar{i}\,x + \bar{j}\,y + \bar{k}\,z$$

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \bar{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \bar{k}\frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\bar{a} = \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z$$

Współrzędne wektora $\bar{a}$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}$$

lub $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \qquad a_x = \dfrac{dv_z}{dt}$

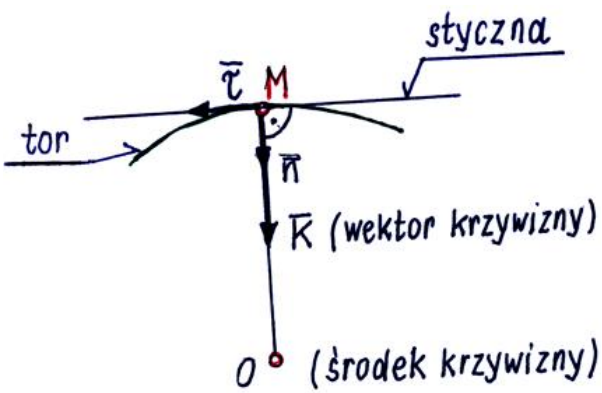
Wartość wektora $\bar{a}$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Kosinusy kierunkowe wektora $\bar{a}$

$\cos(\bar{a},x) = a_x/a \qquad \cos(\bar{a},y) = a_y/a \qquad \cos(\bar{a},z) = a_z/a$

3. W opisie ruchu sposobem naturalnym

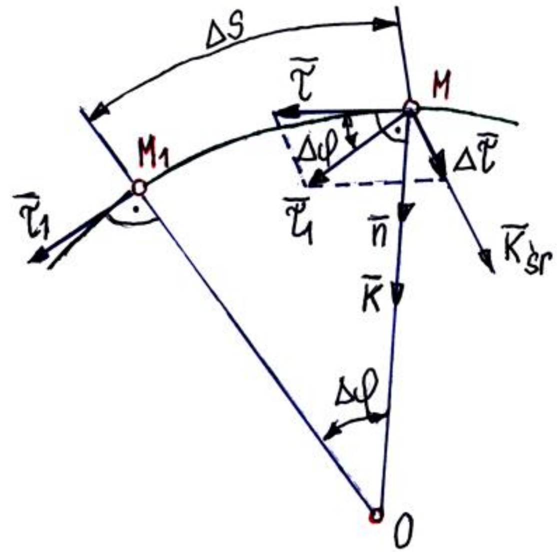


$\bar{\tau}$ - wersor styczny do toru

$\bar{n}$ - wersor normalny do toru

$\bar{K}$ - krzywizna toru

OM = ρ - promień krzywizny toru



Wektor krzywizny w punkcie M

$$\bar{K} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \bar{\tau}}{\Delta s} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \qquad (1)$$

gdy $\Delta s \to 0$ to $\Delta\varphi \to 0$, więc $\lim\limits_{\Delta s \to 0} |\Delta\bar{\tau}| = \lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} |\Delta\bar{\tau}| = \tau \cdot \Delta\varphi = 1 \cdot \Delta\varphi = \Delta\varphi$

$$|\bar{K}| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \qquad (2) \qquad (\rho \text{ - promień krzywizny })$$

Gdy $\Delta s \to 0$, a więc $\Delta\varphi \to 0$ to kierunek $\Delta\bar{\tau} \to$ kierunek $\bar{n}$. Z (1) i (2) otrzymujemy

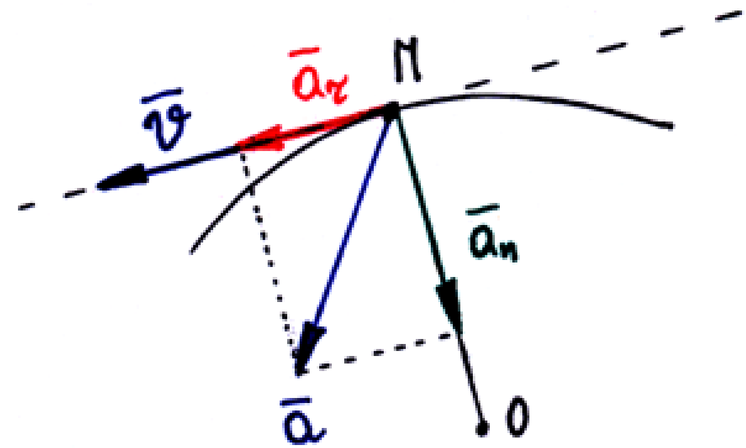
$$\bar{K} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{n}\frac{1}{\rho}$$

Z definicji $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt}$ oraz zależności $\bar{v} = \bar{\tau}\dfrac{ds}{dt}$ i $\bar{\tau} = \bar{\tau}[s(t)]$ wynika:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\tau}}{dt}\frac{ds}{dt} + \bar{\tau}\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{ds}{dt} + \bar{\tau}\frac{d^2 s}{dt^2}$$

Uwzględniając $\bar{K} = \dfrac{d\bar{\tau}}{ds} = \bar{n}\dfrac{1}{\rho}$ (3) oraz $v = \dfrac{ds}{dt}$ otrzymujemy

$$\bar{a} = \bar{n}\frac{v^2}{\rho} + \bar{\tau}\frac{dv}{dt} = \bar{a}_n + \bar{a}_\tau$$



$\bar{a}_n$ - przyspieszenie normalne

$\bar{a}_\tau$ - przyspieszenie styczne

$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$; cos $(\bar{a}, \bar{n})$ $= a_n/a$; cos $(\bar{a}, \bar{\tau})$ $= a_\tau/a$

Mając zadany ruch p. M równaniami skończonymi możemy wyliczyć:

v^2, $\left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2$, $a^2 = (a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2)$ a stąd promień krzywizny toru

$$\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2}}$$