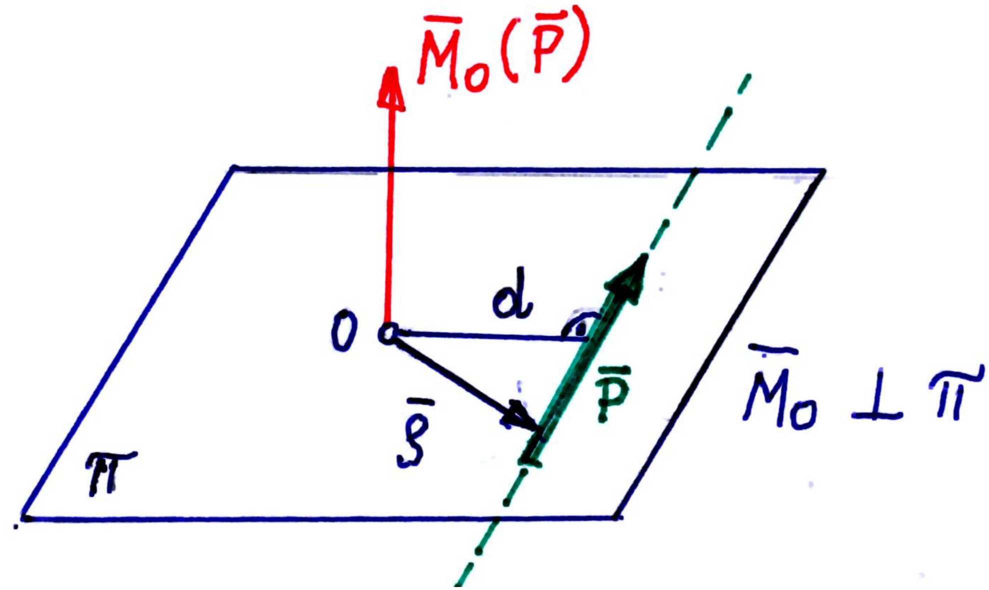
MOMENT SIŁY

Definicja

Moment siły $\overline{P}$ względem punktu (bieguna) O:

$$\overline{M}_o(\overline{P}) = \overline{\rho} \times \overline{P}$$



Wartość wektora momentu:

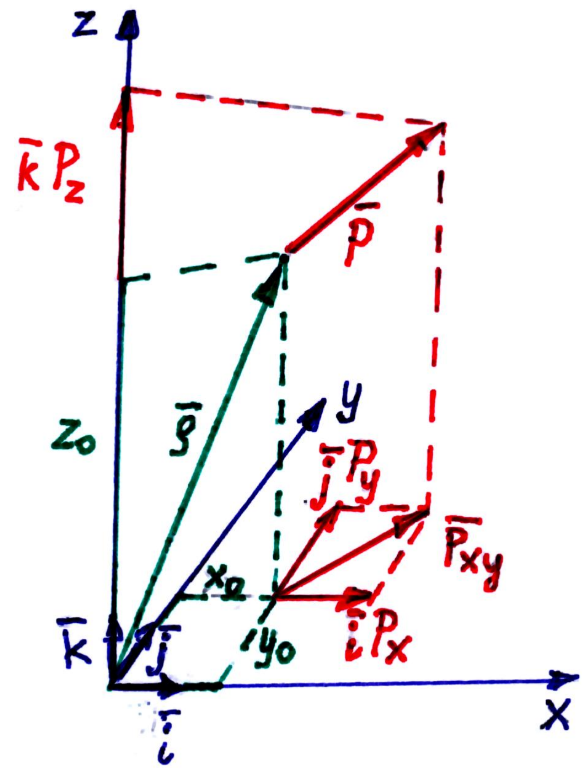
$$M_o(\overline{P}) = P \cdot \rho \cdot \sin <(\overline{\rho}, \overline{P}) = P \cdot d$$

Wektor momentu jest prostopadły do płaszczyzny $\overline{P}$ i $\overline{\rho}$.

Zwrot: patrząc od strony strzałki $\overline{M}$ obrót siły przeciwny do wskazówek zegara.

Współrzędne wektora momentu $\overline{M}_o(M_x, M_y, M_z)$ oblicza się jako minory wyznacznika

$$\overline{M_o} = \bar{i}M_x + \bar{j}M_y + \bar{k}M_z$$



$$\overline{M}_O(\overline{P}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_o & y_o & z_o \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – wersory osi

$\bar{\rho}\,(x_0, y_0, z_0)$

$\overline{P}(P_x, P_y, P_z)$

$\mathbf{M_x = P_z y_o - P_y z_o}$

$\mathbf{M_y = P_x z_o - P_z x_o}$

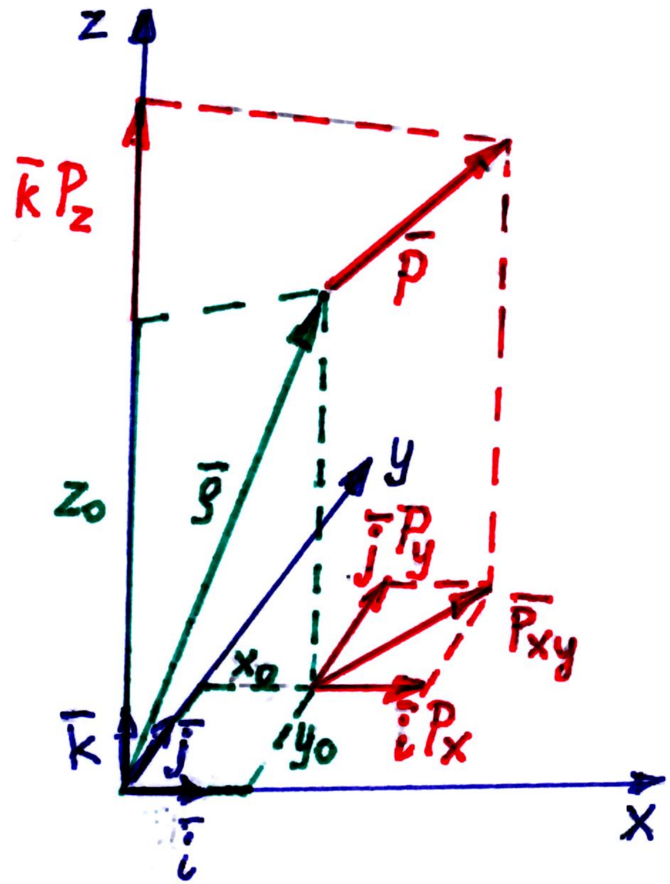
$\mathbf{M_z = P_y x_o - P_x y_o}$

<u>Wartość wektora momentu:</u>

$$M_o(\overline{P}) = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

M_x, M_y, M_z – momenty siły $\overline{P}$ względem osi x, y, z.

<u>Moment siły względem osi jest to moment rzutu tej siły na płaszczyznę prostopadłą do osi liczony względem punktu przebicia tej osi z płaszczyzną.</u>



$M_x = P_z y_o - P_y z_o$

$M_y = P_x z_o - P_z x_o$

$M_z = P_y x_o - P_x y_o$

<u>Szczególne przypadki</u>

(1) Siła w płaszczyźnie np. xy. Wówczas z_o=0 i P_z=0. Więc M_x=0, M_y=0, stąd:

$$M_o(\overline{P}) = M_z = P_y x_0 - P_x y_0$$

(2) Prosta działania siły przechodzi przez biegun O. Wówczas $\bar{\rho}$=0 i $\overline{M}_o$=0.

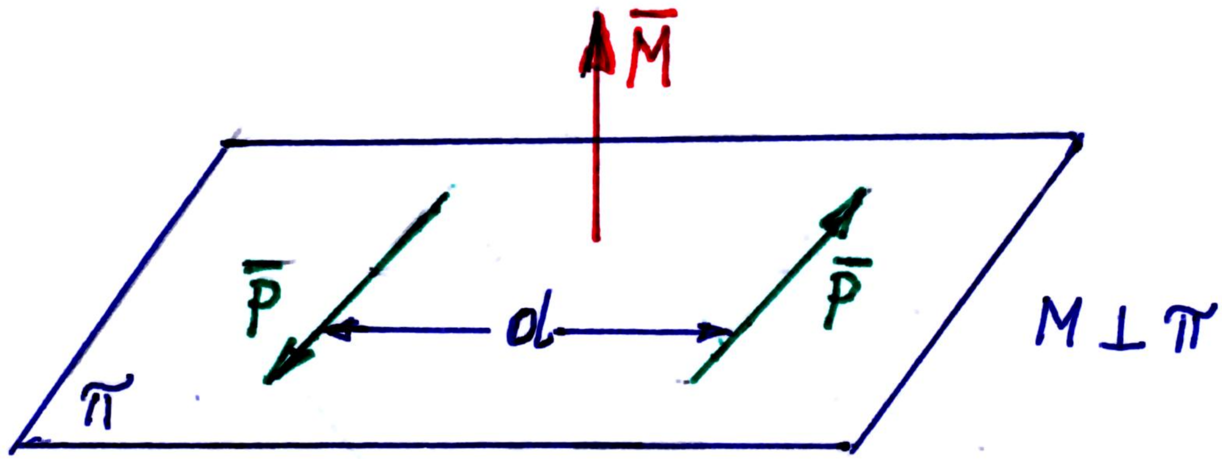
(3) Jeżeli siła równoległa do osi np. z, to P_y= P_x=0 i M_z=0.

PARA SIŁ

Układ 2 sił równoległych nie leżących na jednej prostej, o równych modułach i przeciwnych zwrotach.

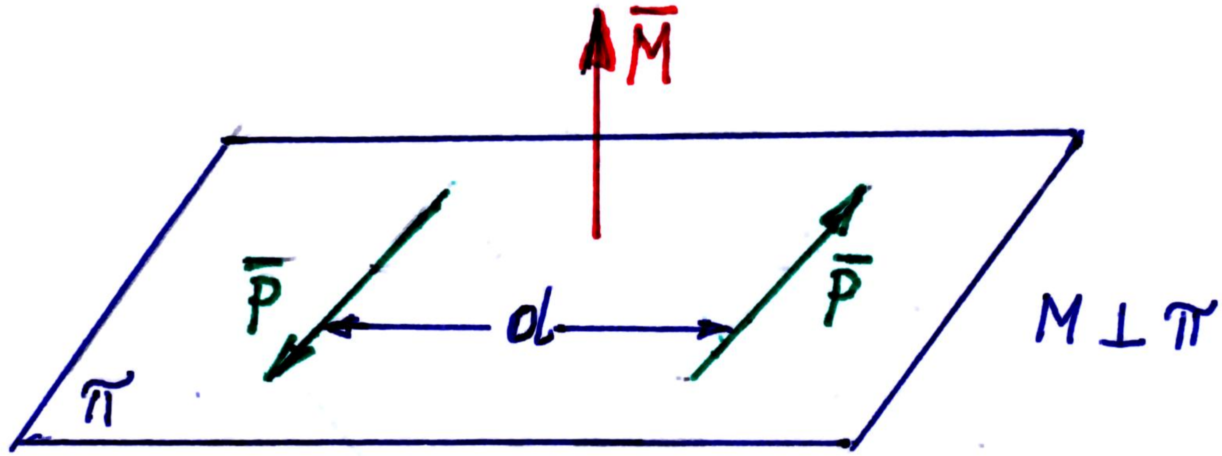
d – **ramię pary**

Moment pary: $M=P\cdot d$



Zwrot wektora momentu pary jest taki, by patrząc od strony strzałki wektora widzieć obrót pary przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Para sił, pojedyncza siła i moment siły są to elementarne układy statyki, tzn. nie da się ich przedstawić w prostszej postaci.



Twierdzenia o parach sił

Działanie pary sił na ciało sztywne nie zmieni się, jeżeli:

(a) Parę przesuniemy w dowolne położenie w płaszczyźnie jej działania;

(b) Zmienimy siły pary i ramię pary tak, by wektor momentu pozostał niezmieniony;

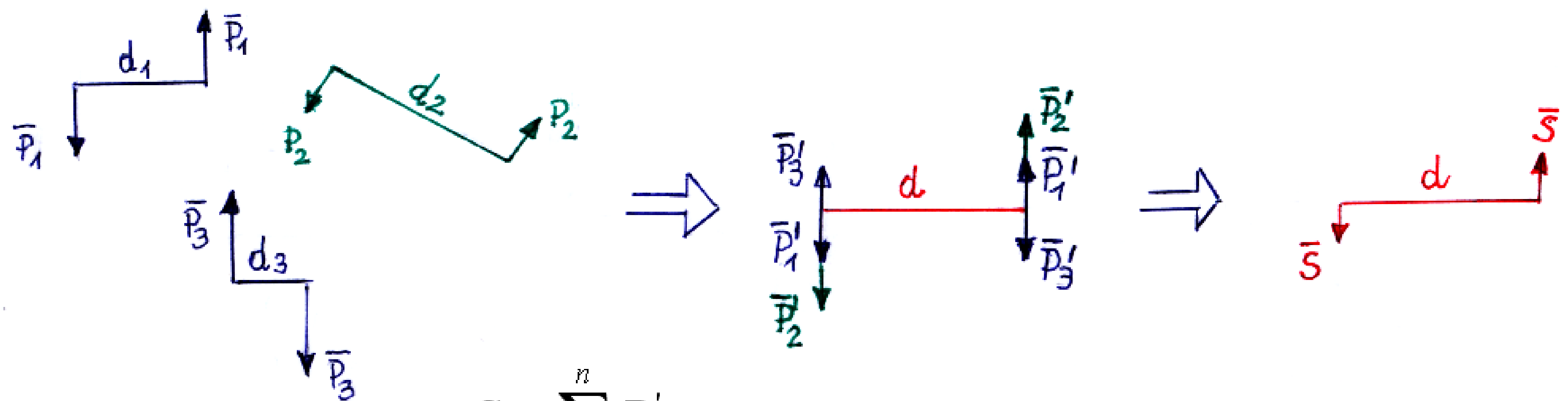
(c) Przesuniemy parę do płaszczyzny równoległej do płaszczyzny jej działania.

Składanie par sił leżących w jednej płaszczyźnie

Na podstawie własności (a) i (b) można:

Obrać dowolne ramię *d* i zastąpić każdą parę parą o ramieniu *d* dobierając odpowiednią siłę P_i' tak, aby

$$P_i \cdot d_i = P_i' \cdot d = M_i$$



$$S = \sum_{i=1}^{n} P_i'$$

Wartość momentu pary sił $\bar{S}$ **:**

$$M = d \cdot S = d \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i' = \sum_{i=1}^{n} (d \cdot P_i') = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

PŁASKI DOWOLNY UKŁAD SIŁ

Def.: **Wszystkie siły leżą w jednej płaszczyźnie.**

Redukcja układu sił = sprowadzenie tego układu do elementarnych układów sił, np.

- **dwójki zerowej**
- **jednej siły (przechodzącej przez biegun redukcji)**
- **pary sił**
- **jednej siły i pary sił (tzn. siły przesuniętej względem bieguna redukcji)**

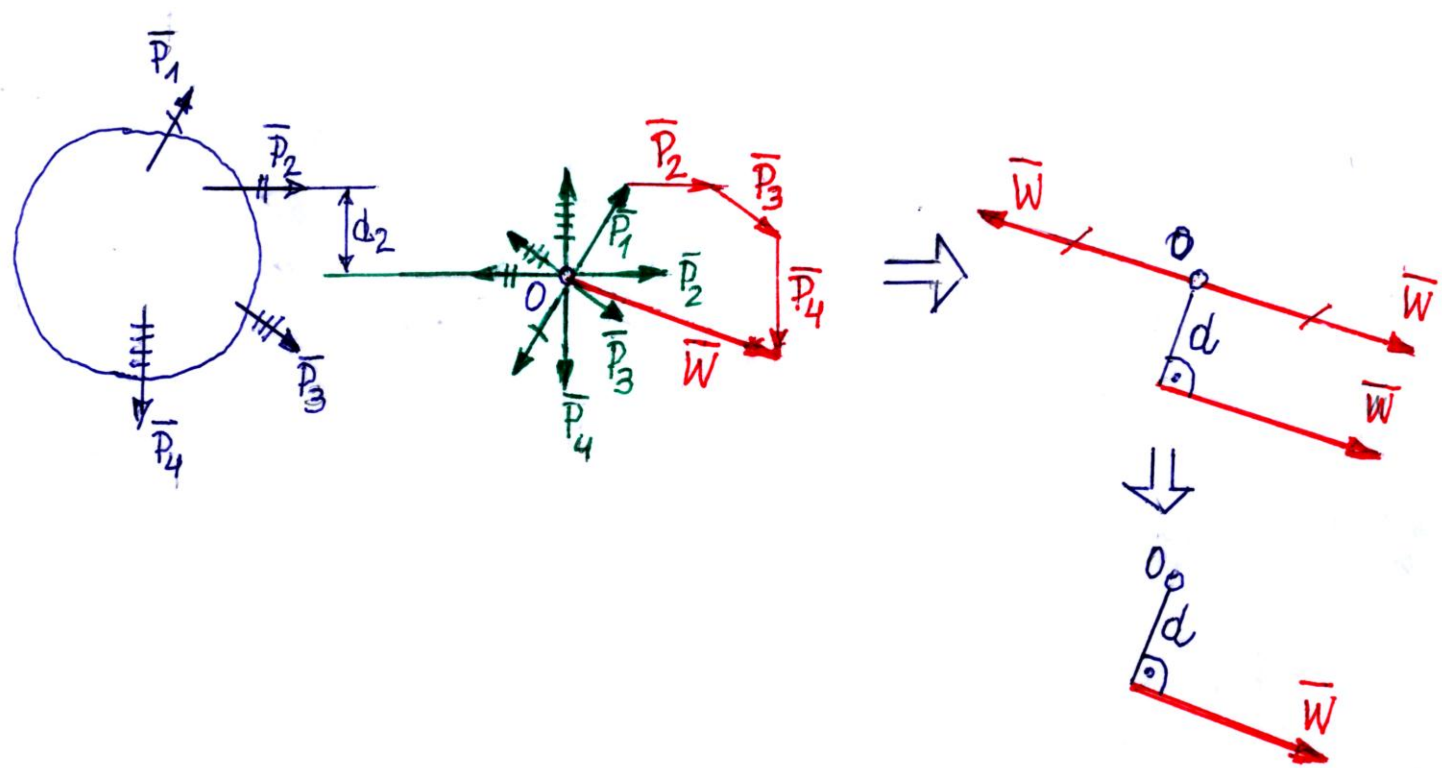
PŁASKI DOWOLNY UKŁAD SIŁ

W dowolnym punkcie O płaszczyzny (tzw. biegun redukcji) przykładamy odpowiednie dwójki zerowe. Otrzymujemy:

- układ środkowy, który zastępujemy wypadkową $\overline{W} = \sum \overline{P_i}$

- układ par sił, który zastępujemy jedną parą o momencie $M = \sum P_i d_i$

Siły pary przyjmujemy równe W, stąd ramię pary $d = M / W = \dfrac{\sum P_i d_i}{W}$



Wyniki redukcji w formie skalarnej:

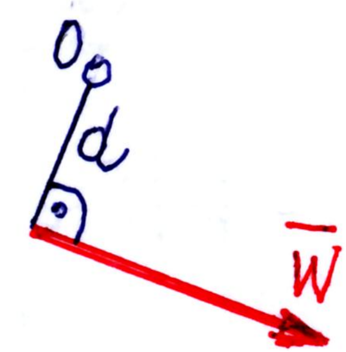
Jeżeli układ w płaszczyźnie xy i $\overline{P_i}(P_{ix}, P_{iy})$ to

$$W_x = \sum P_{ix}$$

$$W_y = \sum P_{iy}$$

$$M = \sum (P_{iy} x_i - P_{ix} y_i)$$

Przypadki szczególne:



(1) $\overline{W} = 0$, $\overline{M} \neq 0$, czyli $\sum P_{ix} = 0$, $\sum P_{iy} = 0$, $\sum (P_{iy} x_i - P_{ix} y_i) \neq 0$

Układ redukuje się do pary sił o momencie M.

(2) $\overline{W} \neq 0$, $\overline{M} = 0$, czyli $\sum P_{ix} \neq 0$, $\sum P_{iy} \neq 0$, $\sum (P_{iy} x_i - P_{ix} y_i) = 0$,

Układ redukuje się do wypadkowej zaczepionej w biegunie redukcji. Jest to środkowy układ sił.

(3) $\overline{W} = 0$, $\overline{M} = 0$, czyli $\sum P_{ix} = 0$, $\sum P_{iy} = 0$, $\sum (P_{iy} x_i - P_{ix} y_i) = 0$,

Są to warunki konieczne i wystarczające równowagi płaskiego dowolnego układu sił.

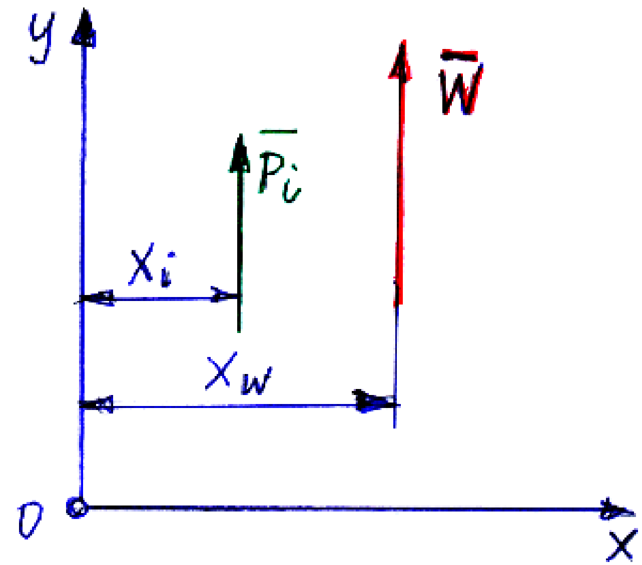
PŁASKI RÓWNOLEGŁY UKŁAD SIŁ

Def.: Wszystkie siły leżą w jednej płaszczyźnie i są do siebie równoległe. Jest to szczególny przypadek płaskiego układu sił.

Np. wszystkie siły równoległe do osi y. Wtedy $P_{ix} \equiv 0$ i $P_{iy} \equiv P_i$.

Jeżeli biegun w początku układu współrzędnych, to warunki równowagi:

$$W = \sum P_i = 0$$
$$M_o = \sum P_i x_i = 0$$



Wypadkowa $\overline{W}$ jest równoległa do osi *y*, jej zwrot jest określony przez znak sumy $\sum P_i$, a odległość od bieguna redukcji wynosi

$$x_w = \frac{\sum P_i x_i}{\sum P_i}$$