AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Mechanika

Wykład Nr 1

Statyka

literatura, pojęcia podstawowe, wielkości fizyczne, działania na wektorach, klasyfikacja obciążeń, modele ciał rzeczywistych, stopnie swobody, więzy i reakcje, aksjomaty statyki, środkowy układ sił – redukcja i warunek równowagi, twierdzenie o trzech siłach

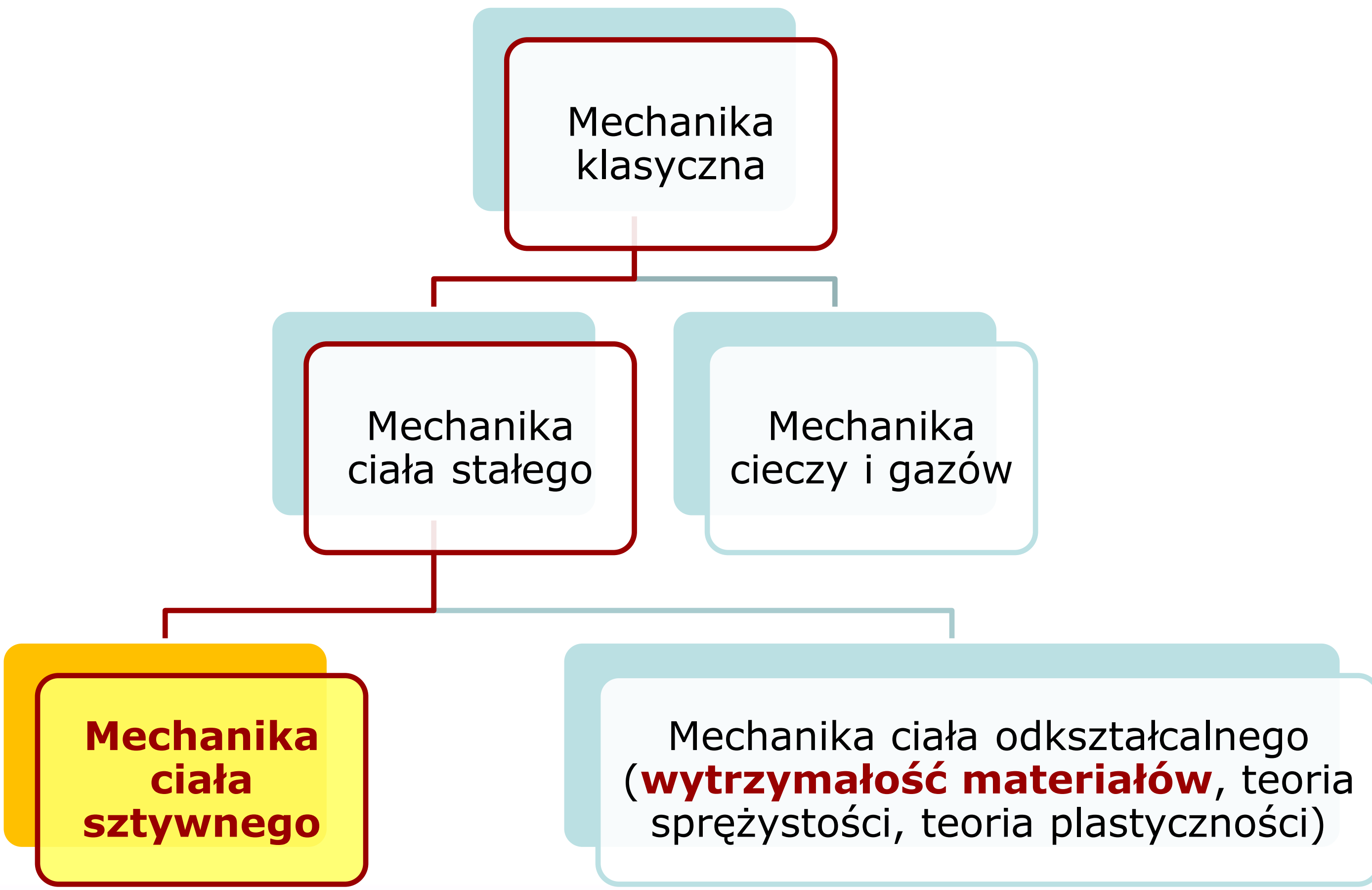
Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

1.1 Polecana literatura:

1. Engel Z., Giergiel J.: Mechanika ogólna. Skrypt AGH
2. Giergiel J.,Głuch L., Łopata A.: Zbiór zadań z mechaniki – metodyka rozwiązań.
3. Misiak J.: Statyka.
4. Misiak J.: Kinematyka i Dynamika
5. Mieszczerski I.W.: Zbiór zadań z mechaniki.
6. Romicki R.: Rozwiązania zadań z mechaniki Zbioru I. W. Mieszczerskiego.

1.2. Pojęcia podstawowe:

Mechanika: nauka (dział fizyki) zajmująca się badaniem ruchu mechanicznego ciał, tj. przemieszczeniami jednych ciał względem drugich oraz wzajemnymi przemieszczeniami pewnych cząstek danego ciała, w zakresie przyczyn ich powstania oraz zjawisk im towarzyszących.



1.2. Pojęcia podstawowe:

Mechanika ciała sztywnego

Statyka dział mechaniki zajmujący się badaniem równowagi ciał materialnych.

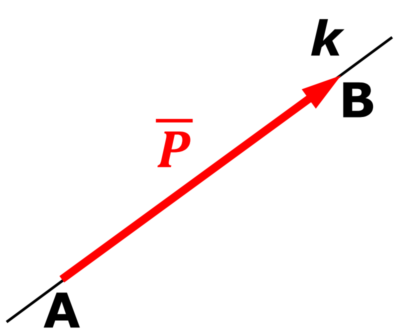
Kinematyka dział mechaniki zajmujący się badaniem ruchu mechanicznego ciał bez uwzględnienia ich cech fizycznych i działających na nie sił..

Dynamika dział mechaniki zajmujący się ruchem ciał materialnych pod działaniem sił (określa związki między siłami a ruchem jako ich skutkiem.

1.2. Wielkości stosowane w mechanice:

a) skalary – wielkości określone wartością liczbową i jednostką mianowaną (masa, czas, długość, pole).

b) wektory – wielkości do określenia których niezbędne jest podanie oprócz wartości (modułu) także kierunku (prostej działania) oraz zwrotu wzdłuż tego kierunku



Wektor można zdefiniować poprzez podanie trzech liczb algebraicznych przedstawiających jego trzy rzuty prostokątne P_x, P_y, P_z (składowe wektora) na osie układu współrzędnych.

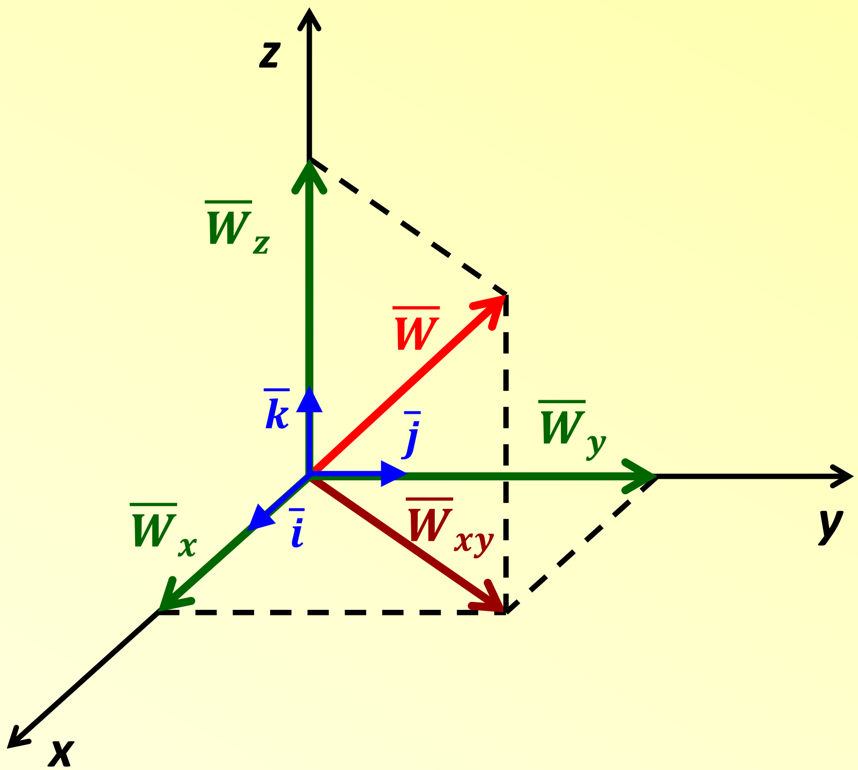
$$\overline{P} = (P_x, P_y, P_z)$$

wówczas:

$$\begin{cases} \overline{P} = \overline{P}_x + \overline{P}_y + \overline{P}_z \\ P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \end{cases}$$

1.2. Wielkości stosowane w mechanice:

Wersory – wektory jednostkowe: $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$



$$\overline{W} = (W_x, W_y, W_z)$$

$$\overline{W} = \overline{W}_x + \overline{W}_y + \overline{W}_z$$

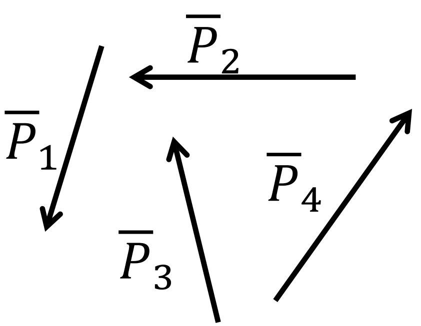
$$\boxed{\overline{W} = W_x \cdot \bar{i} + W_y \cdot \bar{j} + W_z \cdot \bar{k}}$$

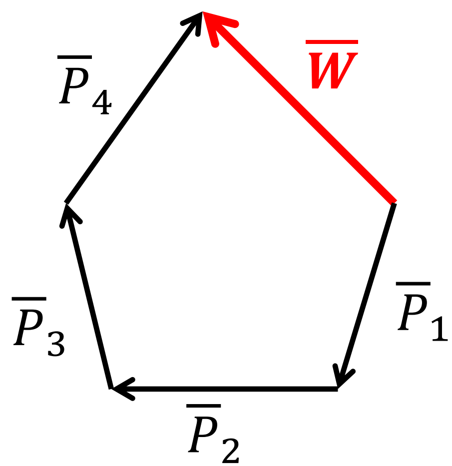
1.2.1. Dziesiętne krotności jednostek

Mnożnik	Przedrostek	Skrót	Przykłady
10^{18}	*eksa -*	*E*	
10^{15}	*peta -*	*P*	
10^{12}	*tera -*	*T*	
10^{9}	*giga -*	*G*	*GPa*
10^{6}	*mega -*	*M*	*MN, MPa*
10^{3}	*kilo -*	*k*	*kg, kW*
10^{2}	*hekto -*	*h*	*hPa, hl*
10^{1}	*deka -*	*da*	*dag,*
1	------	----	*N, m, g, Pa, W*
10^{-1}	*decy -*	*d*	*dm*
10^{-2}	*centy -*	*c*	*cm*
10^{-3}	*mili -*	*m*	*mm, mg*
10^{-6}	*mikro -*	μ	μm
10^{-9}	*nano -*	*n*	*nA*
10^{-12}	*piko -*	*p*	
10^{-15}	*femto -*	*f*	
10^{-18}	*atto -*	*a*	

1.2.2. Podstawowe działania na wektorach

a) Dodawanie wektorów:





$$\overline{W} = \overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \cdots + \overline{P}_n$$

$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$$

jeżeli:

$$\overline{P}_1 = (P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$$

$$\overline{P}_2 = (P_{2x}, P_{2y}, P_{2z})$$

… … … … … … … … … …

$$\overline{P}_n = (P_{nx}, P_{ny}, P_{nz})$$

wówczas:

$$\overline{W} = (W_x, W_y, W_z)$$

$$W_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix}$$

$$W_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy}$$

$$W_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz}$$

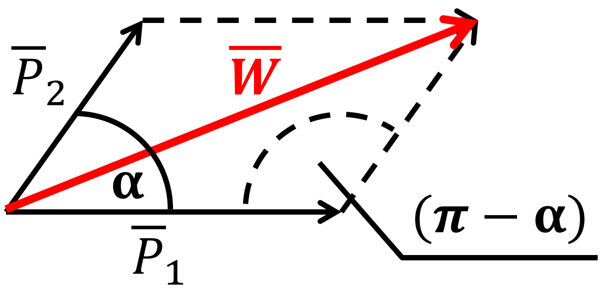
$$\boxed{\overline{W} = \overline{W}_x + \overline{W}_y + \overline{W}_z}$$

$$\boxed{W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}$$

1.2.2. Podstawowe działania na wektorach

a) Dodawanie wektorów:

Wzór Carnota (twierdzenie cosinusów)



$$\overline{\boldsymbol{W}} = \overline{\boldsymbol{P}}_{\mathbf{1}} + \overline{\boldsymbol{P}}_{\mathbf{2}}$$

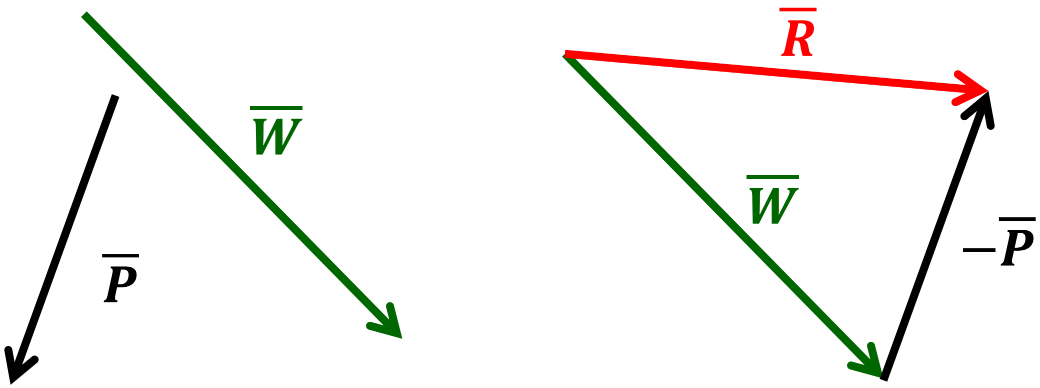
$$W = \sqrt{P_1^2 + P_z^2 - 2P_1P_2\cos(\pi - \alpha)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{W} = \sqrt{\boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{P}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{P}_{\mathbf{2}}\mathbf{cos}\boldsymbol{\alpha}}}$$

b) Odejmowanie wektorów:

Odejmowanie wektora $\overline{P}$ od wektora $\overline{W}$ odpowiada dodaniu do wektora $\overline{W}$ wektora przeciwnego do $\overline{P}$.



$$\overline{R} = \overline{W} - \overline{P} = \overline{W} + (-\overline{P})$$

jeżeli:

$\overline{W} = (W_x, W_y, W_z)$

$\overline{P} = (P_x, P_y, P_z)$

wówczas:

$\overline{R} = \overline{W} - \overline{P} = (R_x, R_y, R_z)$, gdzie:

$R_x = W_x - P_x$

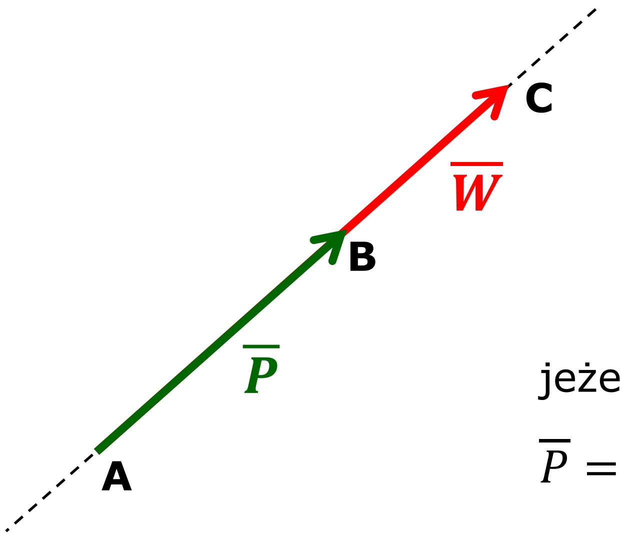
$R_y = W_y - P_y$

$R_z = W_z - P_z$

1.2.2. Podstawowe działania na wektorach

c) Mnożenie wektorów przez liczbę (skalar):

Wynikiem iloczynu wektora $\overline{P}$ przez skalar *n* jest wektor $\overline{W}$ o kierunku zgodnym z wektorem $\overline{P}$ i module *n* razy większym od modułu wektora $\overline{P}$.
Zwrot wektora $\overline{W}$ jest zgodny z wektorem $\overline{P}$ gdy *n*>0, lub przeciwny gdy *n*<0.



$$\left.\begin{array}{l} P = |AB| \\ W = |AC| \\ \overline{W} = n \cdot \overline{P} \end{array}\right\} \quad \frac{W}{P} = \frac{|AC|}{|AB|} = n$$

jeżeli:

$$\overline{P} = (P_x, P_y, P_z)$$

wówczas:

$\overline{W} = n\overline{P} = (W_x, W_y, W_z)$, gdzie:

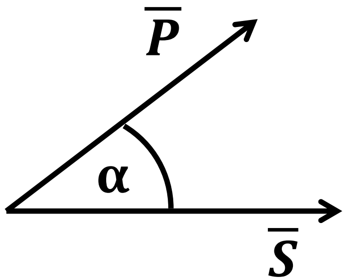
$$W_x = n \cdot P_x$$

$$W_y = n \cdot P_y$$

$$W_z = n \cdot P_z$$

d) Iloczyn skalarny dwóch wektorów:

Wynikiem iloczynu skalarnego wektora $\overline{P}$ i wektora $\overline{S}$ jest skalar równy iloczynowi modułów wektorów $\overline{P}$ i $\overline{S}$ oraz cosinusa kąta zawartego między nimi.



$$W = \overline{P} \circ \overline{S} = P \cdot S \cdot cos(\alpha)$$

Np.

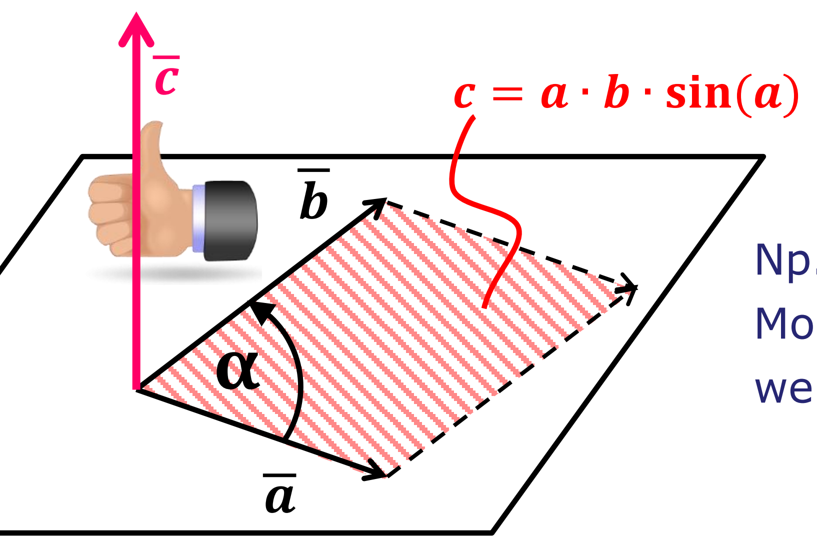
Praca jest iloczynem skalarnym siły i przemieszczenia.

Iloczyn skalarny jest przemienny, tj.: $\boxed{\overline{a} \circ \overline{b} = \overline{b} \circ \overline{a}}$

e) Iloczyn wektorowy dwóch wektorów:

Wynikiem iloczynu wektorowego wektora $\overline{a}$ przez wektor $\overline{b}$ ($\overline{a} \times \overline{b}$) jest wektor $\overline{c}$ prostopadły do płaszczyzny wektorów $\overline{a}$ i $\overline{b}$ oraz module równym polu równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overline{a}$ i $\overline{b}$ (moduł wektora $\overline{c}$ jest równy iloczynowi modułów wektorów $\overline{a}$ i $\overline{b}$ i sinusa kąta zawartego między nimi).

Zwrot wektora $\overline{c}$ określa się zgodnie z regułą prawej dłoni, stosownie do założenia o prawoskrętności kartezjańskiego układu współrzędnych.



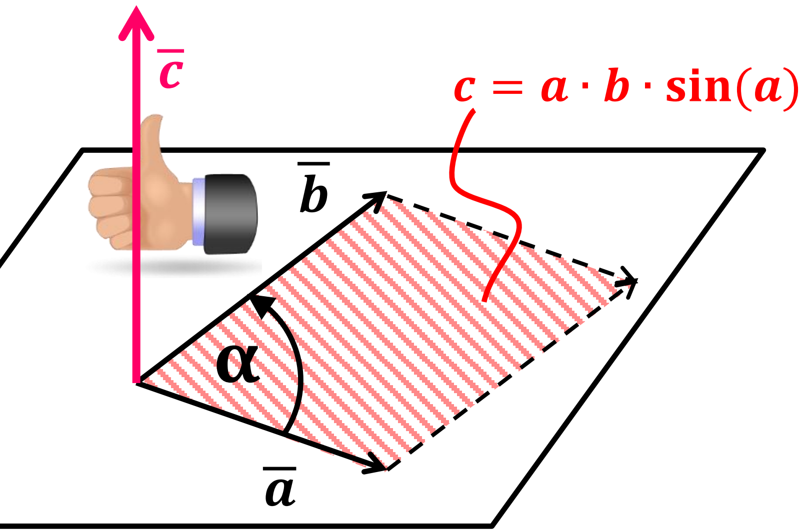
$$\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$$

$$c = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

Np.
Moment siły względem bieguna jest iloczynem wektorowym promienia wodzącego przez wektor siły.

Mnożenie wektorowe nie jest przemienne: $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$

e) Iloczyn wektorowy dwóch wektorów:



$$\bar{\boldsymbol{c}} = \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}}$$

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{\alpha})$$

jeżeli:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) \qquad \bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$$

$$\bar{b} = (b_x, b_y, b_z) \qquad \bar{b} = b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}$$

wówczas:

$$\bar{\boldsymbol{c}} = \bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k}$$

$$= c_x \cdot \bar{i} + c_y \cdot \bar{j} + c_z \cdot \bar{k}$$

gdzie: $c_x = (a_y b_z - a_z b_y)$; $c_y = (a_z b_x - a_x b_z)$; $c_z = (a_x b_y - a_y b_x)$

$$\bar{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{c_x}, \boldsymbol{c_y}, \boldsymbol{c_z})$$

1.3. Klasyfikacja obciążeń

Siła, moment siły – wynik wzajemnego oddziaływania ciał na siebie.

Rodzaje sił – ze względu na pochodzenie

a) **siły zewnętrzne** – przyłożone do danego ciała, wywierane przez inne ciało,

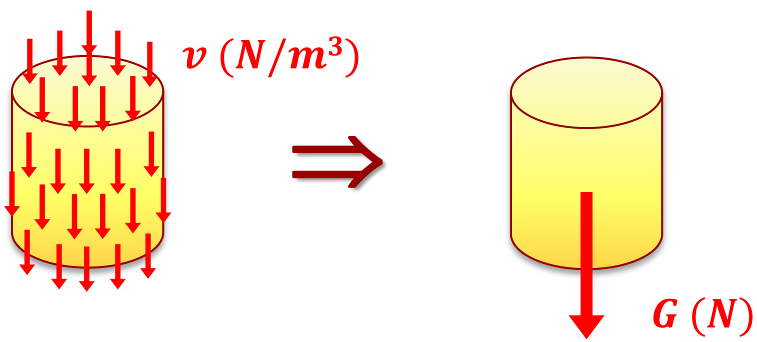
- **czynne** – mogące wywołać ruch, niezależne od warunków w jakich znajduje się dane ciało,
- **bierne** – stanowią wynik oddziaływania więzów (siły reakcji),

b) **siły wewnętrzne** – siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy punktami materialnymi rozpatrywanego układu,

1.3. Klasyfikacja obciążeń

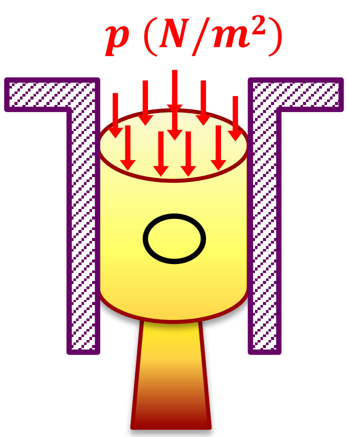
Rodzaje obciążeń – ze względu na sposób przyłożenia:

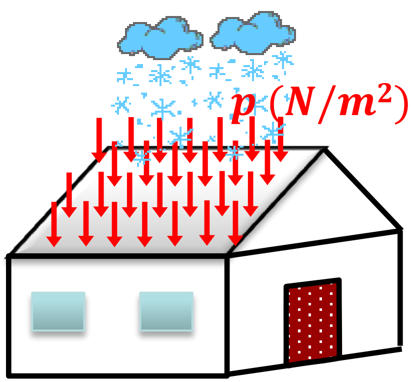
a) objętościowe (masowe) – działające na każdą cząstkę ciała (np. siły ciężkości),

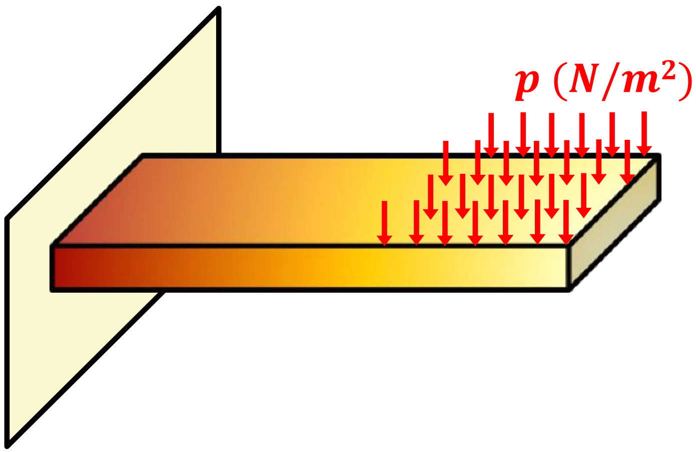


siły masowe zwykle zastępowane są działaniem siły skupionej przyłożonej w środku ciężkości bryły

b) powierzchniowe – działające na powierzchnię ciała,



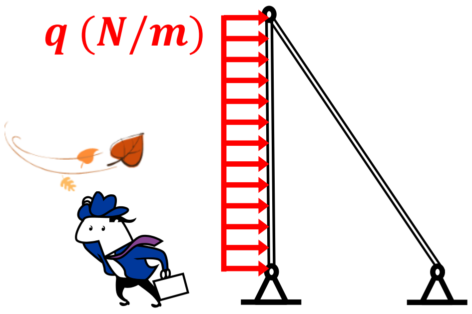


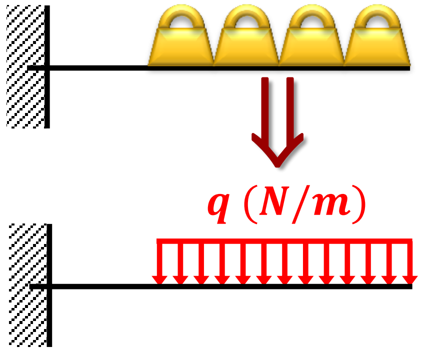


1.3. Klasyfikacja obciążeń

Rodzaje obciążeń – ze względu na sposób przyłożenia:

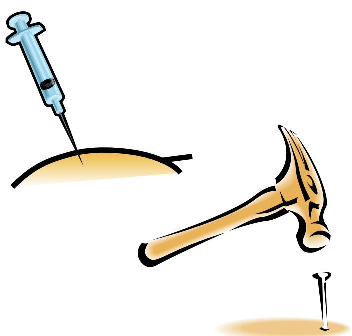
c) obciążenia liniowe – przyłożone w sposób ciągły na pewnej długości,

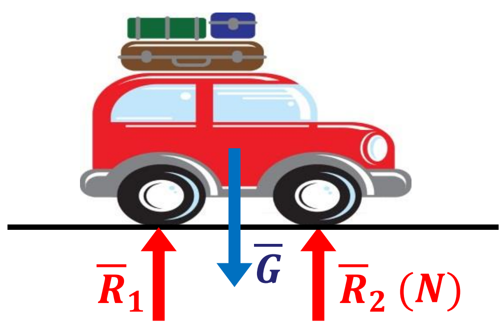




Zazwyczaj za pomocą obciążenia liniowego odwzorowuje się działanie obciążenia powierzchniowego w przypadku modeli płaskich

d) obciążenie skupione – siła lub moment siły przyłożone w punkcie,



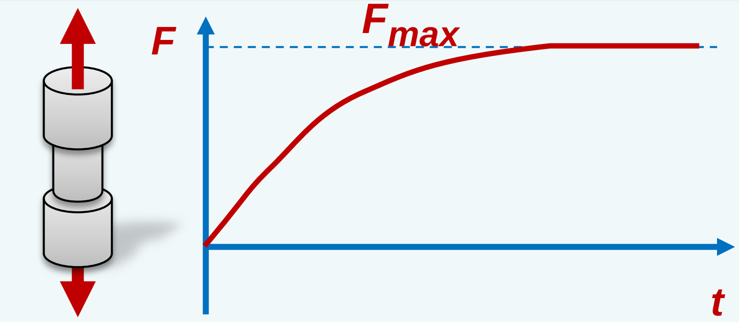


Dane obciążenie uznać można za skupione, jeżeli powierzchnia jego oddziaływania jest znacznie mniejsza od wymiarów elementu.

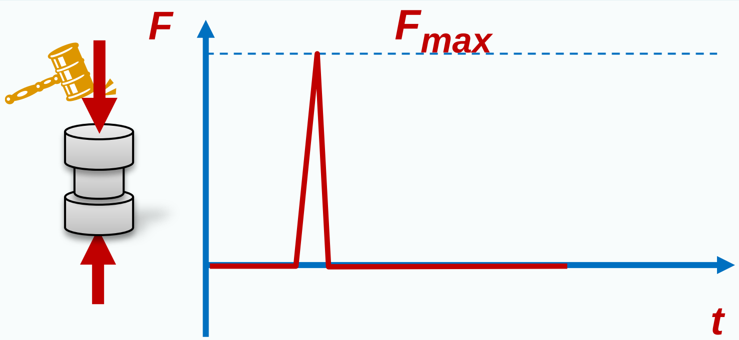
1.3. Klasyfikacja obciążeń

Rodzaje obciążeń – ze względu na zmiany w czasie:

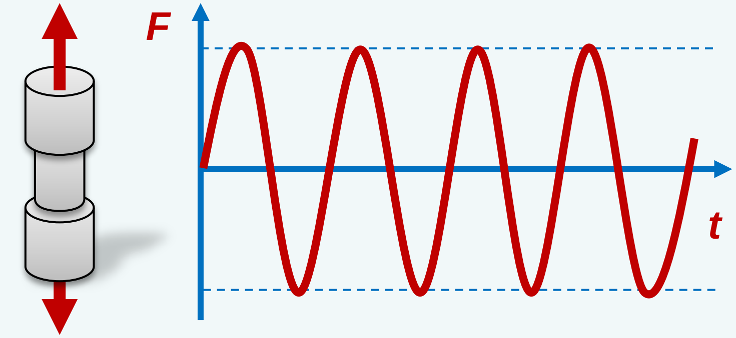
a) statyczne – narastające w sposób powolny od zera do pewnej wartości



b) dynamiczne – przyłożone w sposób nagły, działające impulsowo



c) okresowo-zmienne – zmieniające wielokrotnie wartość w czasie

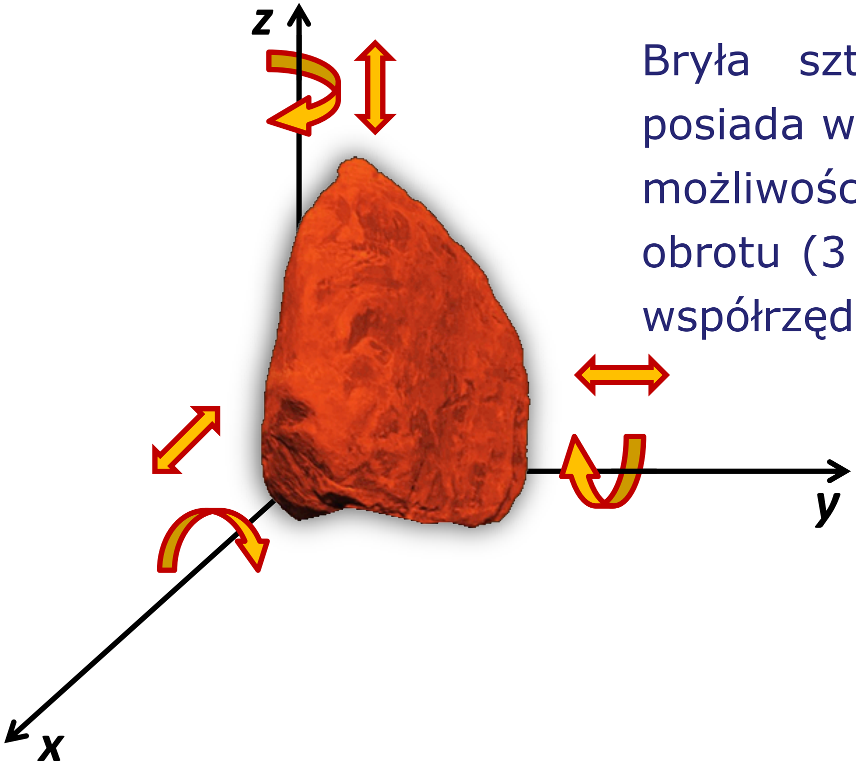


1.4. Wyidealizowane modele ciał rzeczywistych:

punkt materialny	punkt geometryczny któremu przepisano pewną masę.
układ punktów materialnych	(ciało sztywne, bryła) – zbiór punktów materialnych o niezmiennych wzajemnych odległościach
ciało swobodne	ciało mogące dowolnie przemieszczać się w przestrzeni.
ciało nieswobodne	ciało którego ruch w przestrzeni ograniczony jest określonymi więzami.

1.5. Stopień swobody

Stopień swobody – minimalna liczba niezależnych współrzędnych niezbędna do jednoznacznego opisu położenia ciała w przestrzeni.

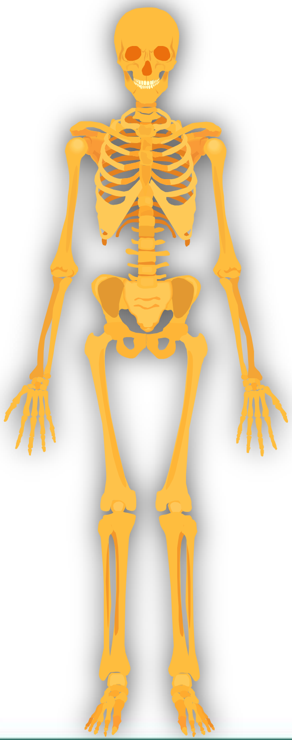


Bryła sztywna, nieograniczona żadnymi węzami, posiada w przestrzeni 6 stopni swobody, związanych z możliwością jej przesunięcia (3 stopnie swobody) i obrotu (3 kolejne stopnie swobody) wokół osi układu współrzędnych.

1.5. Stopień swobody

Stopień swobody – minimalna liczba niezależnych współrzędnych niezbędna do jednoznacznego opisu położenia ciała w przestrzeni.

Ciało materialne (np. człon mechanizmu) w ruchowym połączeniu z innym ciałem tworzy ***parę kinematyczną*** tracąc przy tym pewną liczbę stopni swobody, określoną przez tzw. ***klasę pary kinematycznej***, tj. liczbę ***więzów*** występujących pomiędzy połączonymi członami.



Ogólnie, jeżeli dwa człony o odpowiednio n_1 i n_2 stopniach swobody połączone są w parę kinematyczną o klasie w, to układ taki ma $(n_1 + n_2 - w)$ stopni swobody.

Przykładowo:

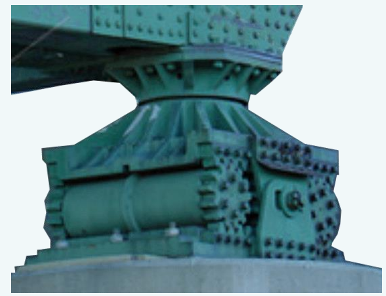
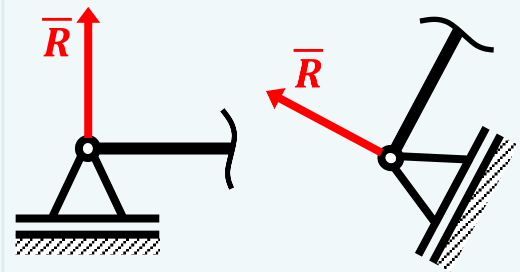
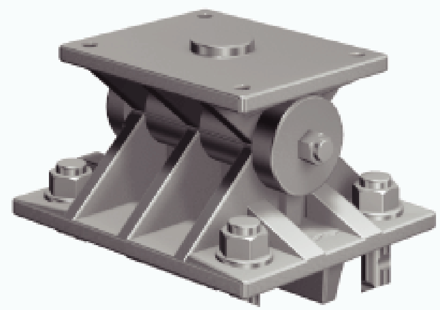
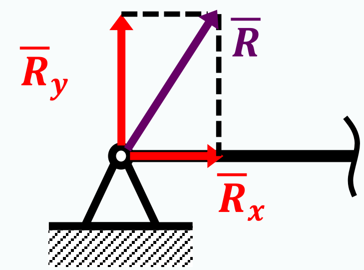
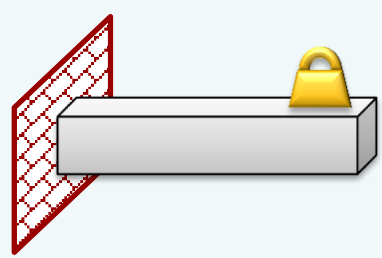
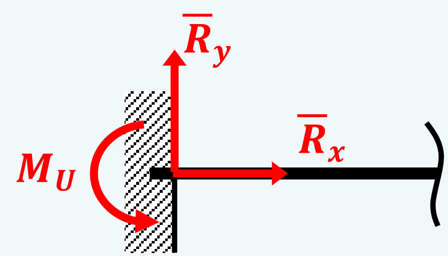
Ludzki szkielet posiada ok. 240 stopni swobody.

Każda z kończyn – górna jak i dolna – mają po około 30.

1.6. Więzy oraz siły reakcji

Więzy – elementy ograniczające liczbę stopni swobody.

Charakterystyczne rodzaje więzów i związane z nimi siły reakcji.

a) podpora przegubowa przesuwna reakcja prostopadła do płaszczyzny przesuwu		
b) podpora przegubowa stała siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji)		
c) utwierdzenie (wspornik) siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji) oraz moment utwierdzenia		

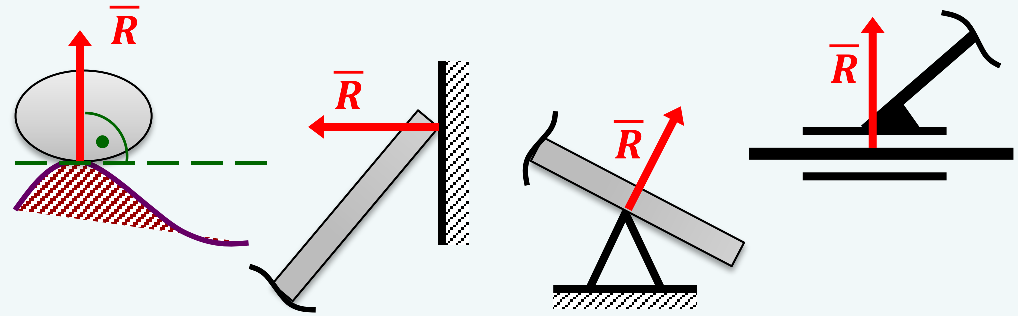
1.6. Więzy oraz siły reakcji

Więzy – elementy ograniczające liczbę stopni swobody.

Charakterystyczne rodzaje więzów i związane z nimi siły reakcji.

d) gładka powierzchnia oporowa

reakcja prostopadła do gładkiej powierzchni

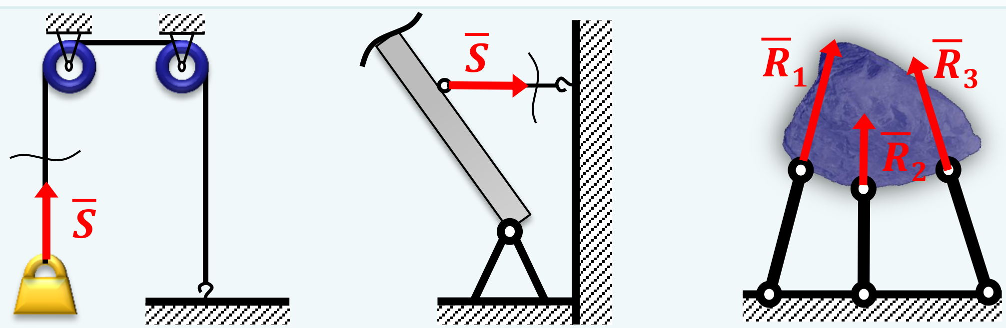


e) przegub kulisty

siła reakcji o dowolnym kierunku (trzy składowe reakcji)

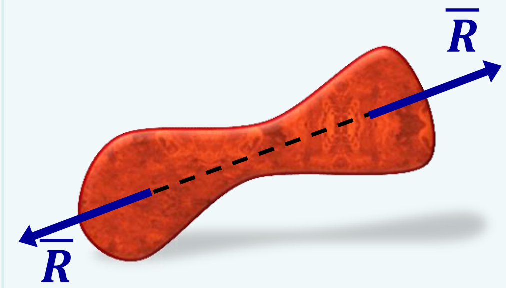
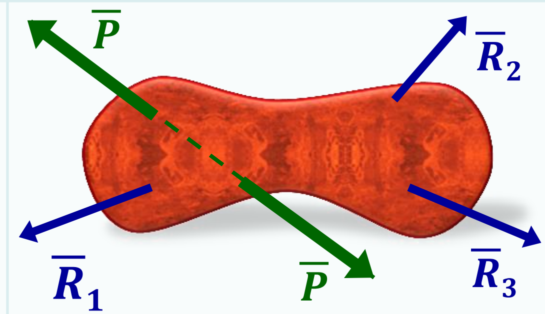
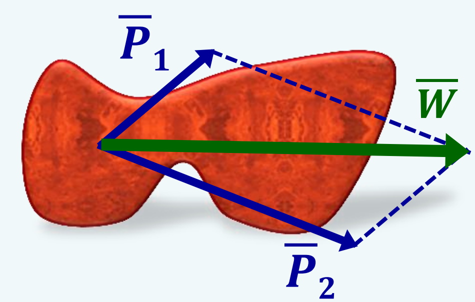
f) podwieszenie na cięgnach, podparcie przegubowe

siła reakcji działa wzdłuż cięgna lub nieważkiego pręta



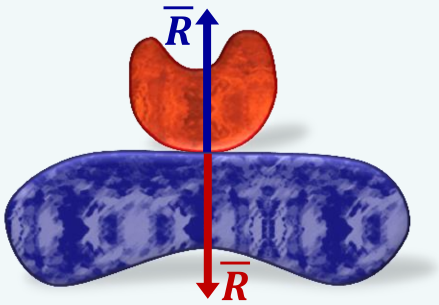
1.7. Aksjomaty statyki

Aksjomaty – postulaty, których się nie dowodzi, przyjmowane jako pewnik.

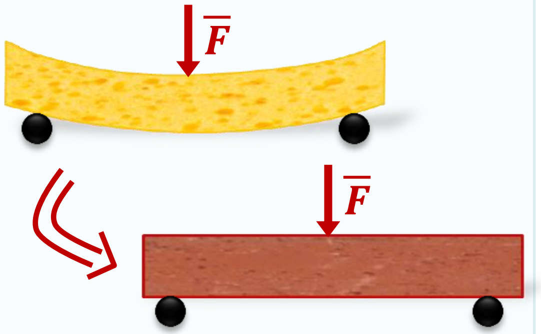
1) Dwie siły równoważą się wzajemnie jeśli mają jednakowe wartości (moduły), działają wzdłuż jednego kierunku i mają przeciwne zwroty.	
2) Działanie układu sił działających na ciało nie ulegnie zmianie, jeżeli dodamy do niego lub odejmiemy od niego układ sił równoważny zeru.	
3) Wypadkowa dwóch sił przechodzi przez punkt ich przecięcia i wyraża się długością przekątnej równoległoboku zbudowanego na tych siłach (jest wektorową sumą sił składowych).	

1.7. Aksjomaty statyki

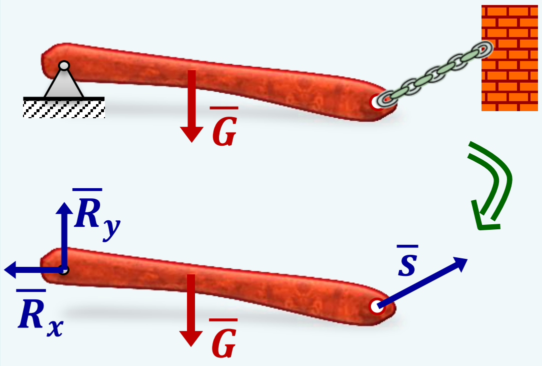
4) Wszelkiemu działaniu siły odpowiada równe i przeciwne skierowane przeciwdziałanie.



5) Równowaga ciała odkształcalnego nie zostanie naruszana jeżeli ciało to stanie się ciałem sztywnym.

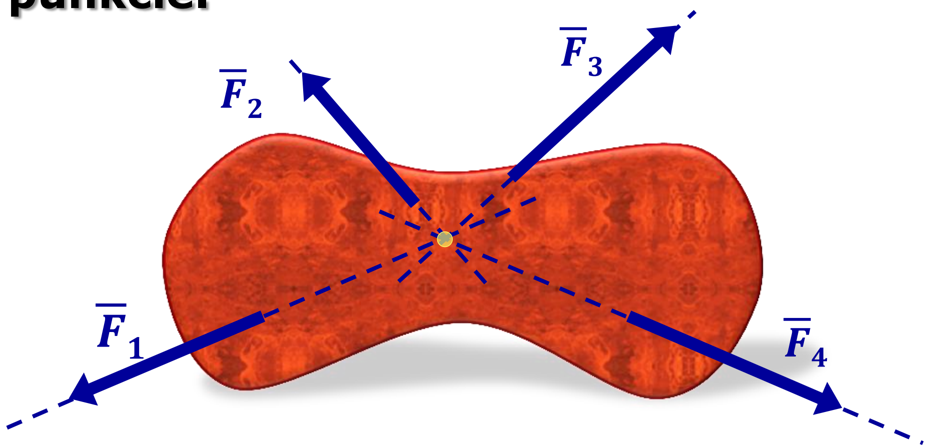


6) Ciało nieswobodne możemy traktować jak ciało swobodne jeżeli myślowo uwolnili się je od więzów, zastępując ich działanie odpowiednimi reakcjami.

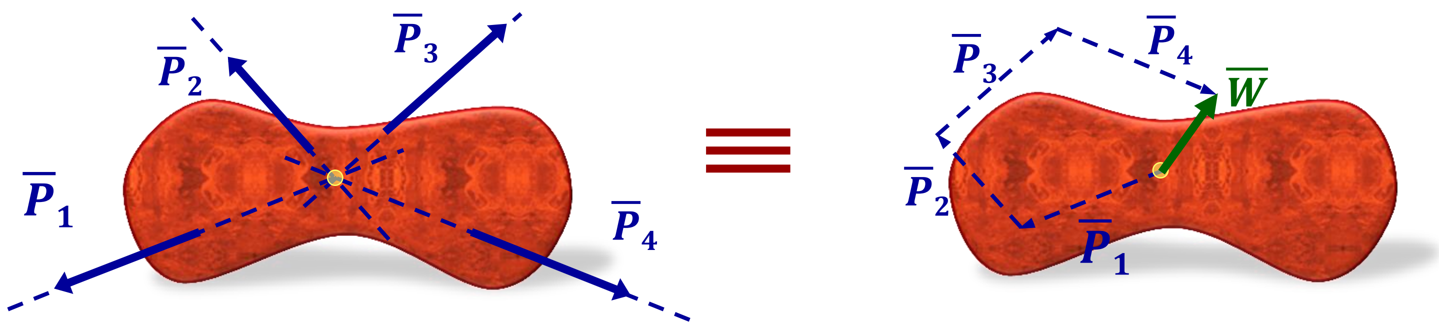


1.8. Środkowy układ sił (zbieżny układ sił)

Środkowy układ sił (zbieżny układ sił) – układ sił których linie działania przecinają się w jednym punkcie.



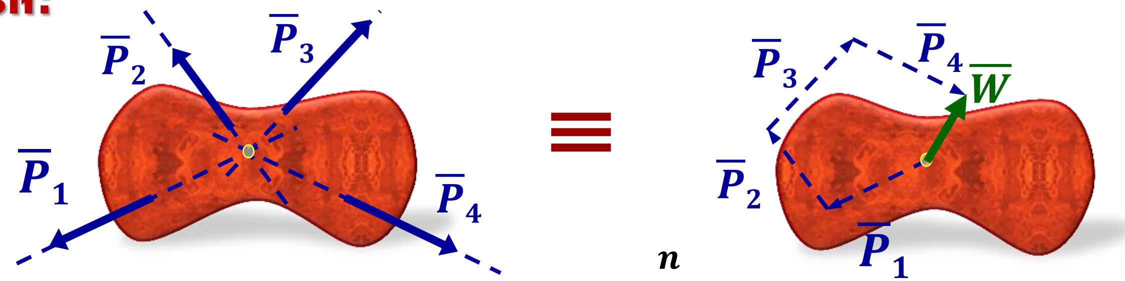
Redukcja środkowego układu sił: środkowy układ sił można zastąpić działaniem jednej siły wypadkowej – **wektora głównego** – będącego sumą wszystkich sił działających na ciało, przyczepionego w punkcie przecięcia ich kierunków działania.



$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$$

1.9. Środkowy układ sił – warunki równowagi

Redukcja środkowego układu sił:



$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$$

Warunki równowagi środkowego układu sił:

a) w zapisie wektorowym:

$$\overline{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = 0}$$

Zbieżny układ sił jest w równowadze, gdy wielobok sił działających na ciało jest wielobokiem zamkniętym (wektor główny jest równy zero)

b) w ujęciu analitycznym:

$$\overline{W} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i = 0 \quad \Rightarrow$$

Warunki równowagi <u>płaskiego środkowego układu sił</u>:

$$W_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$$

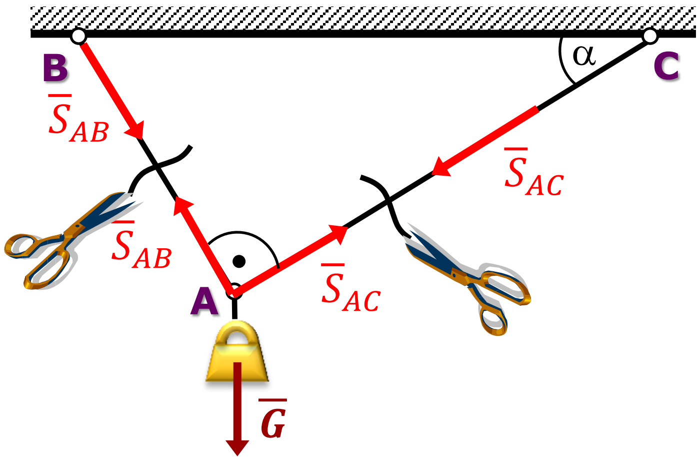
$$W_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0$$

$$W_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0$$

Warunki równowagi <u>przestrzennego środkowego układu sił</u> (wszystkie trzy równania)

Przykład 2.1:

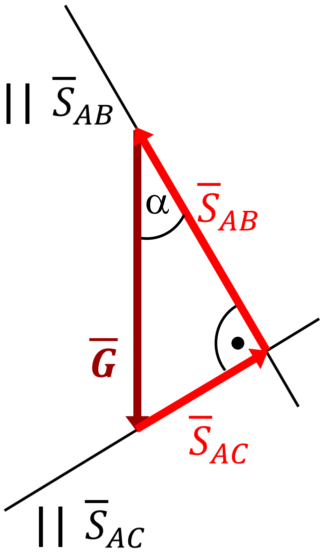
Obliczyć naciągi w linkach AB i AC, jeżeli w punkcie A podwieszono ciężar G.



Dane:
$G = 400$ N
$\alpha = 30^o$

Szukane:
S_{AB}, S_{AC}

Metoda grafo-analityczna:

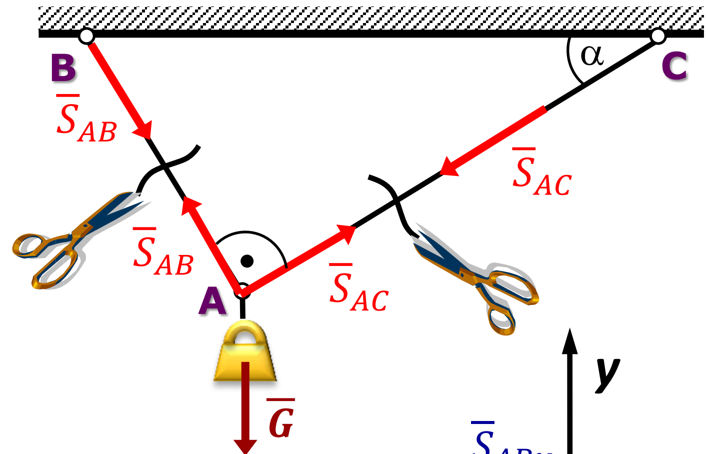


$$S_{AB} = G \cdot \cos\alpha = 400 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \mathbf{200\sqrt{3}\ N}$$

$$S_{AC} = G \cdot \sin\alpha = 400 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \mathbf{200\ N}$$

Przykład 2.1:

Obliczyć naciągi w linkach AB i AC, jeżeli w punkcie A podwieszono ciężar G.

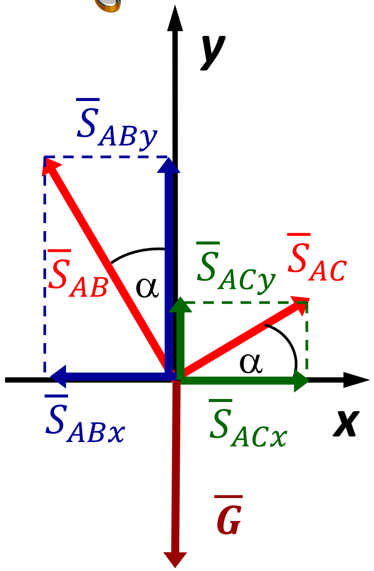


Dane:
$G = 400$ N
$\alpha = 30^o$

Szukane:
S_{AB}, S_{AC}

Metoda analityczna:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{ACx}} - \boldsymbol{S_{ABx}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S_{ACy}} + \boldsymbol{S_{ABy}} - \boldsymbol{G} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} S_{AC} \cdot \cos\alpha - S_{AB} \cdot \sin\alpha = 0 \\ S_{AC} \cdot \sin\alpha + S_{AB} \cdot \cos\alpha - G = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S_{AC} = S_{AB} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = S_{AB} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

$$S_{AB} \cdot \cos\alpha + S_{AB} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha - G = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = \frac{G}{\cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha} = \frac{G \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = G \cdot \cos\alpha$$

$$\boldsymbol{S_{AB} = 200\sqrt{3}} \ \ \textbf{N}$$

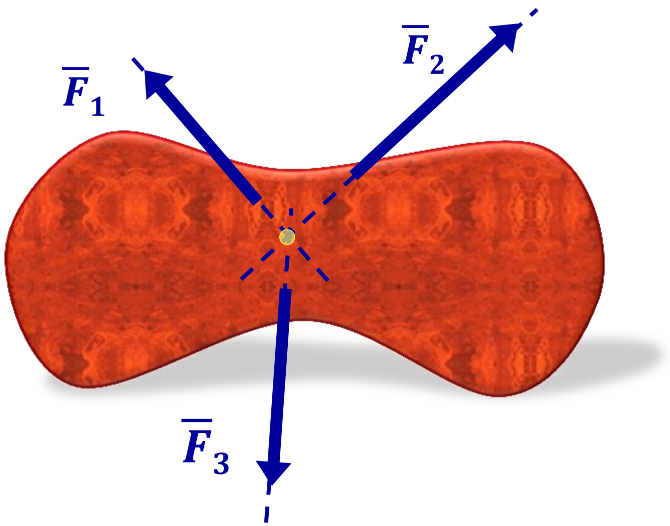
$$S_{AC} = S_{AB} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = S_{AB} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \textbf{200 N}$$

1.10. Środkowy układ sił – twierdzenie o trzech siłach

Twierdzenie o trzech siłach:

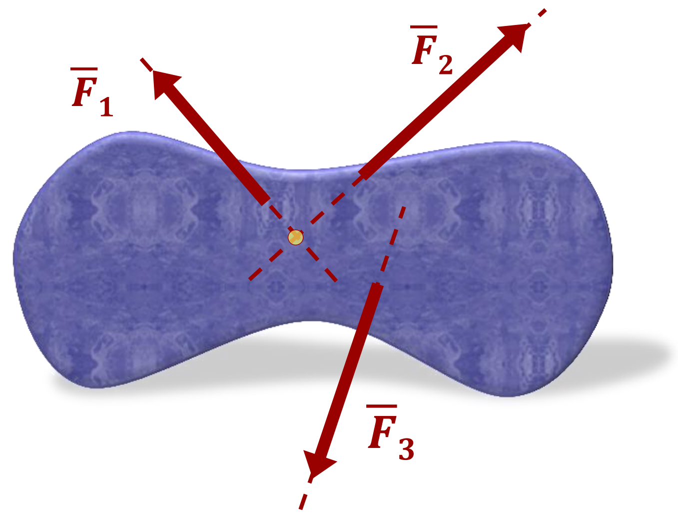
Układ trzech sił jest w równowadze jeżeli kierunki działania tych sił przecinają się w jednym punkcie (siły tworzą układ zbieżny) oraz wielobok utworzony z tych sił jest wielobokiem zamkniętym.

Przykłady:



Układ sił równoważących się pod warunkiem:

$$\overline{W} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = 0$$

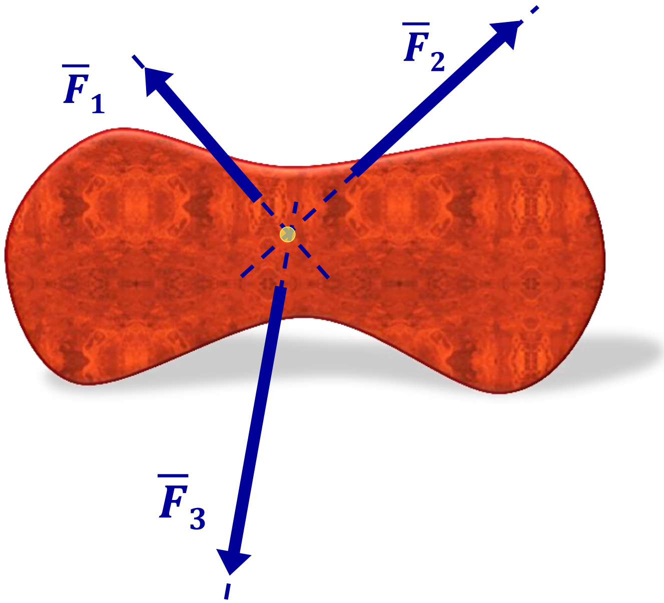


Układ sił nie mogący się równoważyć, nawet jeśli:

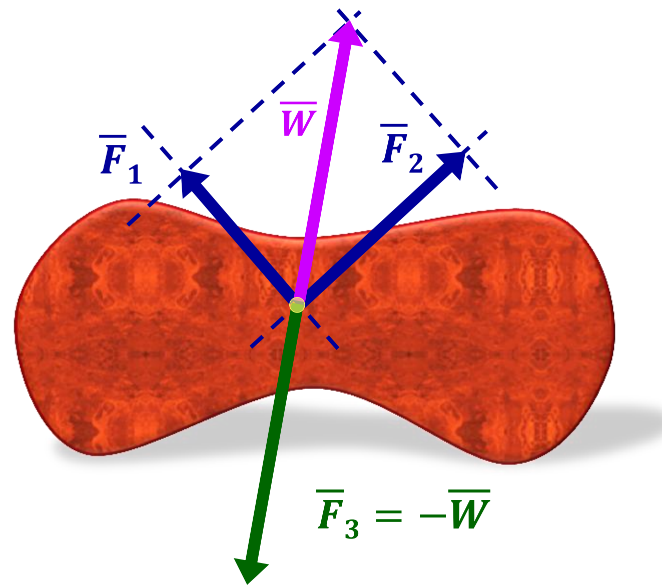
$$\overline{W} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = 0$$

Twierdzenie o trzech siłach:

Układ trzech sił jest w równowadze jeżeli kierunki działania tych sił przecinają się w jednym punkcie (siły tworzą układ zbieżny) oraz wielobok utworzony z tych sił jest wielobokiem zamkniętym.



Dowód:

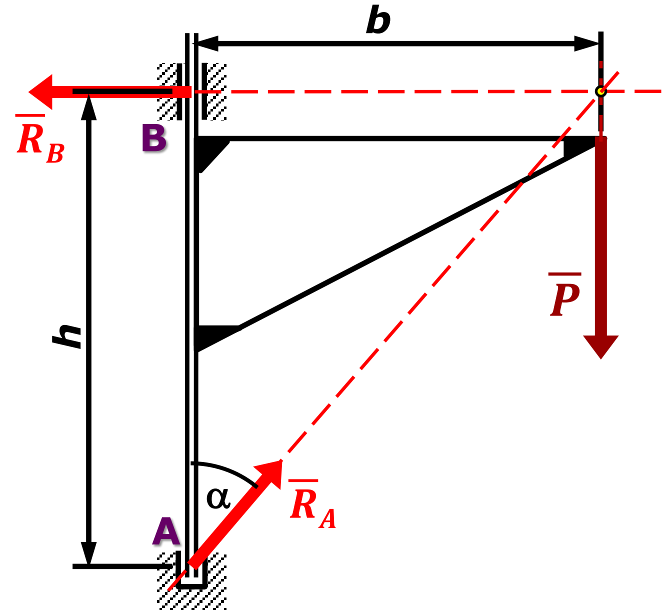


Aksjomat 3: Wypadkowa dwóch sił przechodzi przez punkt ich przecięcia i wyraża się długością przekątnej równoległoboku zbudowanego na tych siłach.

Aksjomat 1: Dwie siły równoważą się wzajemnie jeśli mają jednakowe wartości (moduły), działają wzdłuż jednego kierunku i mają przeciwne zwroty.

Przykład 2.2:

Obliczyć reakcje w łożyskach A i B konstrukcji jak na rysunku.



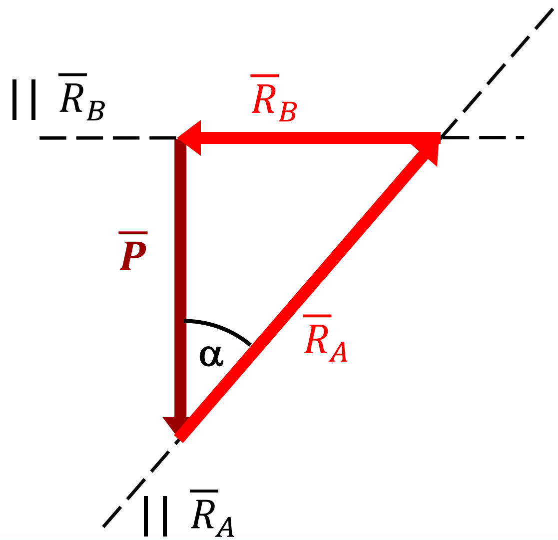
Dane:
$P = 13$ kN
$b = 75$ cm
$h = 130$ cm
$\alpha = 30^o$

Szukane:
R_A, R_B

Z twierdzenia o trzech siłach:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{h}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{75}{130}\right) \approx 30°$$

Metoda grafo-analityczna:



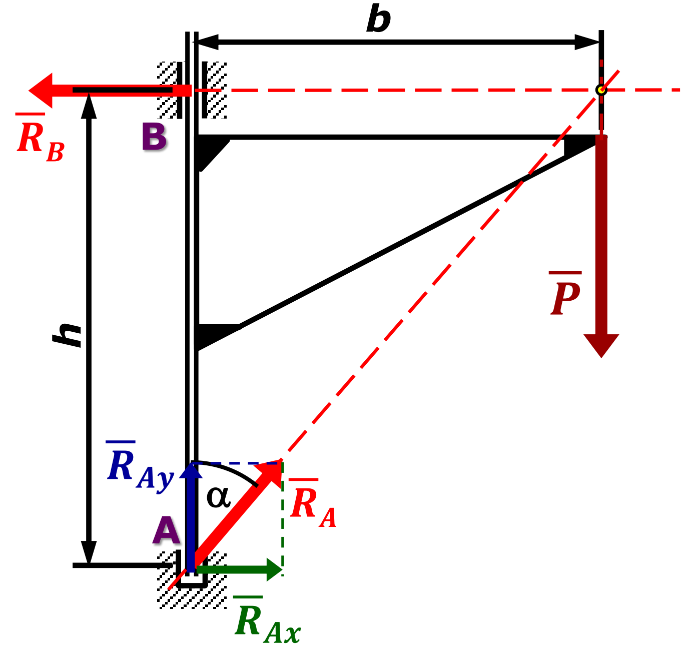
$$R_A = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{P}{\cos 30°} = \frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{26\sqrt{3}}{3} \approx \mathbf{15\ kN}$$

$$R_B = R_A \cdot \sin\alpha = \frac{26\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}5 \approx \mathbf{7{,}5\ \ kN}$$

1.10. Środkowy układ sił – twierdzenie o trzech siłach

Przykład 2.2:

Obliczyć reakcje w łożyskach A i B konstrukcji jak na rysunku.



Dane:
P = 13 kN
b = 75 cm
h = 130 cm
α = 30°

Szukane:
R_A, R_B

Z twierdzenia o trzech siłach:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{h}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{75}{130}\right) \approx 30^\circ$$

Metoda analityczna:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\boldsymbol{R_B} + \boldsymbol{R_{Ax}} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\boldsymbol{P} + \boldsymbol{R_{Ay}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\boldsymbol{P} + \boldsymbol{R_A} \cdot \cos\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{R_A} = \frac{\boldsymbol{P}}{\cos\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mathbf{13}}{\cos\boldsymbol{\alpha}} = \frac{13}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{26\sqrt{3}}{3} \approx \mathbf{15\ kN}$$

$$-\boldsymbol{R_B} + \boldsymbol{R_{Ax}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R_B} = \boldsymbol{R_A} \cdot \sin\boldsymbol{\alpha} = \frac{26\sqrt{3}}{3} \cdot 0{,}5 \approx \mathbf{7{,}5\ \ kN}$$