Instrukcja przygotowania i realizacji scenariusza dotyczącego ćwiczenia T9 z przedmiotu "Wytrzymałość materiałów", przeznaczona dla studentów II roku studiów stacjonarnych I stopnia w kierunku Energetyka na Wydz. Energetyki i Paliw*

Treść ćwiczenia **T9: Obliczanie wytrzymałościowe prętów równocześnie zginanych i skręcanych**.

1. Problem obliczeń wytrzymałościowych materiału, w którym występuje złożony stan naprężeń (dwuosiowy lub trójosiowy)

Ten problem wynika stąd, że światowa nauka nie zdołała jeszcze dokładnie poznać zjawisk powstawania naprężeń niszczących w materiale, w którym występuje złożony stan naprężeń. Jest to jeden z najtrudniejszych problemów wytrzymałości materiałów, bo badania nad tym problemem prowadzone są już od blisko pięciu wieków. Dla jego rozwiązania, już od XVII w. opracowuje się różne hipotezy, nazywane najpierw hipotezami wytrzymałościowymi, a od pewnego czasu, także hipotezami wytężeniowymi. Istotą każdej hipotezy jest aparat matematyczny, zaproponowany przez autorów hipotezy do redukowania złożonego stanu naprężeń w materiale, do stanu jednoosiowego rozciągania, dotychczas najlepiej poznanego. Jak wykazują doświadczenia, tylko niektóre hipotezy znalazły wystarczające empiryczne uzasadnienie do ich praktycznego stosowania. Do takich hipotez należy hipoteza energii właściwej odkształcenia postaciowego, zaproponowana w 1904 r. przez polskiego uczonego M.T. Hubera. Ta hipoteza została już w pełni potwierdzona dla materiałów sprężysto - plastycznych, i w tym zakresie jest obecnie stosowana na całym świecie. Natomiast dla materiałów sprężysto- kruchych jest stosowna hipoteza de Saint -Venanta, a także hipoteza Mohra.

2. Warunki wytrzymałościowe wynikające z hipotez wytężeniowych dla dwuosiowego (płaskiego) stanu naprężeń

2.1. Materiały sprężysto-plastyczne - hipoteza energii właściwej odkształcenia postaciowego (autorzy: Huber, Mises, Hencky)

1). Przypadek, gdy płaski stan naprężeń jest opisany przez naprężenia główne σ_1, σ_2:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \le k_r$$

σ_{red} - naprężenie zredukowane jako miara wytężenia materiału przez płaski stan naprężeń σ_1, σ_2,

k_r - dopuszczalne naprężenie na rozciąganie dla materiału sprężysto-plastycznego.

2). Przypadek, gdy płaski stan naprężeń jest opisany przez dowolne składowe tego stanu σ_x, σ_y, τ_{xy}:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \le k_r$$

2.2. Materiały sprężysto-kruche - hipoteza największego wydłużenia jednostkowego (autorzy: de Saint-Venant, Poncelet)

1). Przypadek, gdy płaski stan naprężeń jest opisany przez naprężenia główne $\sigma_1 > \sigma_2$:

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2 \le k_r$$

---

* Autorem instrukcji jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH.

ν - liczba Poissona dla materiału sprężysto-kruchego,

k_r - dopuszczalne naprężenie na rozciąganie dla materiału sprężysto-kruchego.

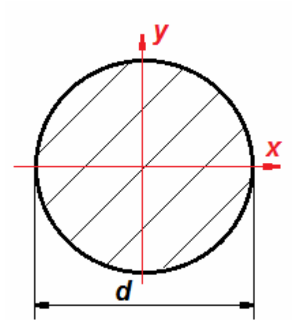
2). Przypadek, gdy płaski stan naprężeń jest opisany przez dowolne składowe tego stanu σ_x, σ_y, τ_{xy}:

$$\sigma_{red} = 0,5 \cdot \left[(1-\nu) \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right) + (1+\nu) \cdot \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \right] \leq k_r$$

3. Przykłady obliczeniowe

3.1. Przykład 1.

W przekroju niebezpiecznym pręta okrągłego pełnego o średnicy **d** = 100 mm działają równocześnie moment zginający M_x = 12 kNm oraz moment skręcający M_s = 5 kNm. Obliczyć największe naprężenia główne w tym przekroju i sprawdzić jego warunek bezpieczeństwa, jeżeli pręt jest wykonany ze stali konstrukcyjnej oraz ma naprężenie dopuszczalne k_r = 150 MPa.



1). Obliczenie największych naprężeń normalnych w przekroju niebezpiecznym pręta:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{W_x} = \frac{M_x \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 32}{3,14 \cdot 100^3 \cdot \left(10^{-3}\right)^3} = 122,3 \cdot 10^6 \, Pa = 122,3 \; MPa \quad , \quad \sigma_y = 0$$

2). Obliczenie maksymalnej wartości naprężenia stycznego w przekroju niebezpiecznym pręta:

$$\tau_{xy} = \frac{M_s}{W_o} = \frac{M_s \cdot 16}{\pi \cdot d^3} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 100^3 \cdot \left(10^{-3}\right)^3} = 30,6 \cdot 10^6 \, Pa = 30,6 \; MPa$$

3).Obliczenie największych naprężeń głównych w przekroju niebezpiecznym pręta:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \frac{122,3 + 0}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(122,3 - 0)^2 + 4 \cdot 30,6^2} = 129,5 \, MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \frac{122,3 + 0}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(122,3 - 0)^2 + 4 \cdot 30,6^2} = -7,3 \, MPa$$

4). Sprawdzenie warunku bezpieczeństwa dla niebezpiecznego przekroju pręta:

Ponieważ pręt jest wykonany z materiału sprężysto - plastycznego (stal konstrukcyjna), do sprawdzenia przedmiotowego warunku należy zastosować hipotezę wytężeniową energii właściwej odkształcenia postaciowego (hipoteza Hubera - Misesa - Hencky' ego).

- Przypadek, gdy płaski stan naprężeń jest opisany przez niezerowe naprężenia główne σ_1, σ_2:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{129,5^2 + (-7,2)^2 - 129,5 \cdot (-7,2)} = 133,3 \; MPa < k_r = 150 \, MPa$$

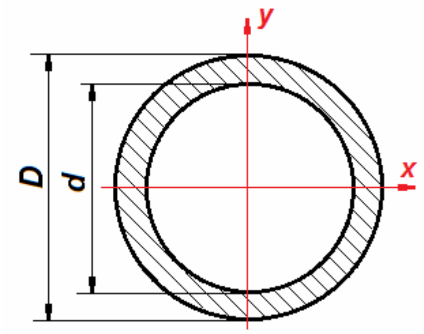
- Przypadek, gdy płaski stan naprężeń jest opisany przez dowolne składowe tego stanu σ_x, σ_y, τ_{xy}:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} = \sqrt{122,3^2 + 0^2 - 122,3 \cdot 0 + 3 \cdot 30,6^2} = 133,3 \, MPa < k_r = 150 \, MPa$$

Sprawdzany warunek bezpieczeństwa jest spełniony

3.2. Przykład 2.

Wspornik żeliwny, który ma przekrój niebezpieczny jak na rysunku, jest obciążony równocześnie momentem zginającym $\mathbf{M_g}$ = 4 kNm oraz momentem skręcającym $\mathbf{M_S}$ = 4 kNm Sprawdzić warunek bezpieczeństwa tego przekroju, jeżeli ***d*** = 60 mm, ***D*** = 100 mm, liczba Poissona dla materiału wspornika ν = 0,23, a naprężenie dopuszczalne $\mathbf{k_r}$ = 60 MPa.



1). Obliczenie największych wartości naprężeń normalnych w przekroju niebezpiecznym wspornika:

$$\sigma_x = \frac{0,5\cdot D\cdot M_g}{J_x} = \frac{0,5\cdot D\cdot M_g\cdot 64}{\pi\cdot\left(D^4-d^4\right)} = \frac{0,5\cdot 100\cdot 10^{-3}\cdot 4\cdot 10^{3}\cdot 64}{3,14\cdot\left[100^4\cdot\left(10^{-3}\right)^4-60^4\cdot\left(10^{-3}\right)^4\right]} = 46,8\cdot 10^6\ \text{Pa} = 46,8\ \text{MPa}$$

$$\sigma_y = 0$$

2). Obliczenie maksymalnej wartości naprężenia stycznego w przekroju niebezpiecznym wspornika:

$$\tau_{xy} = \frac{M_s}{W_o} = \frac{M_s\cdot 16\cdot D}{\pi\cdot\left(D^4-d^4\right)} = \frac{4\cdot 10^{3}\cdot 16\cdot 100\cdot 10^{-3}}{3,14\cdot\left[100^4\cdot(10^{-3})^4-60^4\cdot(10^{-3})^4\right]} = 23,4\cdot 10^6\ \text{Pa} = 23,4\ \text{MPa}$$

3).Obliczenie największych naprężeń głównych w przekroju niebezpiecznym wspornika:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\cdot\tau_{xy}^2} = \frac{46,8+0}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(46,8-0)^2+4\cdot 23,4^2} = 56,5\,\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\cdot\tau_{xy}^2} = \frac{46,8+0}{2} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(46,8-0)^2+4\cdot 23,4^2} = -9,7\,\text{MPa}$$

4). Sprawdzenie warunku bezpieczeństwa dla niebezpiecznego przekroju wspornika:

Ponieważ pręt jest wykonany z materiału sprężysto - kruchego (żeliwo), do sprawdzenia przedmiotowego warunku należy zastosować hipotezę wytężeniową największego wydłużenia jednostkowego (Hipoteza de Saint-Venanta - Ponceleta)

- Przypadek, gdy płaski stan naprężeń jest opisany przez naprężenia główne $\boldsymbol{\sigma_1 > \sigma_2}$:

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \nu\cdot\sigma_2 = 56,5 - 0,23\cdot(-9,7) = 58,7\,\text{MPa} < k_r = 60\,\text{MPa}$$

- Przypadek, gdy płaski stan naprężeń jest opisany przez dowolne składowe tego stanu $\boldsymbol{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy}}$:

$$\sigma_{red} = 0,5\cdot\left[(1-\nu)\cdot\left(\sigma_x+\sigma_y\right)+(1+\nu)\cdot\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\cdot\tau_{xy}^2}\right] =$$

$$0,5\cdot\left[(1-0,23)\cdot(46,8+0)+(1+0,23)\cdot\sqrt{(46,8-0)^2+4\cdot 23,4^2}\right] = 58,7\,\text{MPa} < k_r = 60\,\text{MPa}$$

Sprawdzany warunek bezpieczeństwa jest spełniony

4. Zadania domowe

Zadanie domowe 1.

Obliczyć, do jakiej wartości należy ograniczyć moment zginający w przekroju niebezpiecznym pręta z przykładu 1, aby można było dwukrotnie powiększyć moment skręcający tego przekroju.

Zadanie domowe 2.

Obliczyć, do jakiej wartości można powiększyć moment zginający w przekroju niebezpiecznym wspornika z przykładu 2, jeżeli moment skręcający tego przekroju został zmniejszony dwukrotnie.

Koniec instrukcji