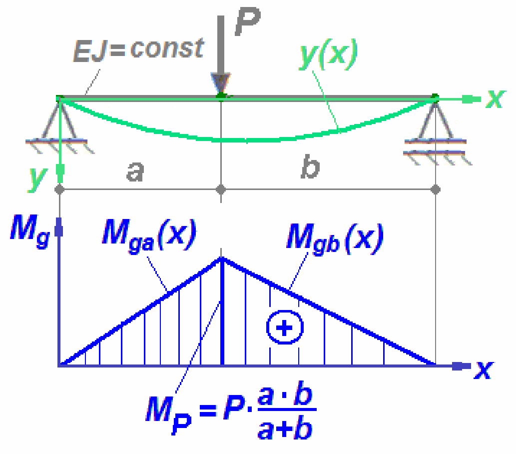
Instrukcja przygotowania i realizacji scenariusza dotyczącego ćwiczenia T8 z przedmiotu "Wytrzymałość materiałów", przeznaczona dla studentów II roku studiów stacjonarnych I stopnia w kierunku Energetyka na Wydz. Energetyki i Paliw*

Treść ćwiczenia **T8**: **Sprawdzanie bezpieczeństwa belek na dopuszczalne ugięcia (warunek sztywności).**



Rys.1.

1. Metoda analityczna

W tej metodzie warunek sztywności belki sprawdza się za pomocą wzoru:

$$\left|y(x)\right|_{max} \leq f_{dop}$$

f_{dop} - ugięcie dopuszczalne belki,

$y(x)$ - funkcja rozkładu ugięcia belki wzdłuż jej długości opisanej współrzędną ***x,*** obliczana jako rozwiązanie całkowe różniczkowego równania linii ugięcia tej belki:

$$EJ \cdot \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -M_g(x)$$

EJ - sztywność przekroju belki na zginanie, stała na długości zginania belki,

$M_g(x)$ - funkcja całkowalna analitycznie, opisująca rozkład momentu zginającego wzdłuż długości belki.

Dla belki jak na rys.1, funkcja $M_g(x)$ ma postać:

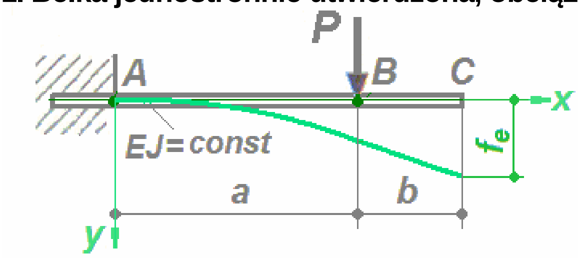
$$M_g(x) = M_{ga}(x) = \frac{M_P}{a} \cdot x\,, \;\; gdy\;\; 0 \leq x \leq a$$

$$M_g(x) = M_{gb}(x) = -\frac{M_P}{b} \cdot x + \frac{M_P}{b}(a+b)\,, \;\; gdy\;\; a \leq x \leq a+b$$

Taka funkcja $M_g(x)$ jest całkowalna analitycznie przedziałami. Z tego powodu, całkowanie różniczkowego równania linii ugięcia belki należy wykonywać w każdym z tych przedziałów oddzielnie, co często jest czasochłonne. Dlatego, przy sprawdzaniu warunku sztywności belek, oblicza się ugięcia maksymalne metodą uproszczoną, polegającą na wykorzystywaniu algebraicznych wzorów wyznaczonych analitycznie dla belek z pojedynczym obciążeniem zewnętrznym czynnym.

2. Metoda uproszczona

2.1. Belka jednostronnie utwierdzona, obciążona jedną siłą zewnętrzną czynną



Warunek sztywności belki:

$$f_e = \frac{Pa^2}{6EJ}(2a+3b) \leq f_{dop}$$

Warunek sztywności belki należy sprawdzać niezależnie od jej warunku bezpieczeństwa wtedy, gdy **zadane ugięcie dopuszczalne f_{dop} jest mniejsze od ugięcia krytycznego f_k** tej belki:

$$f_K = \frac{a \cdot (2a+3b) \cdot k_g \cdot W_g}{6EJ}$$

gdzie:

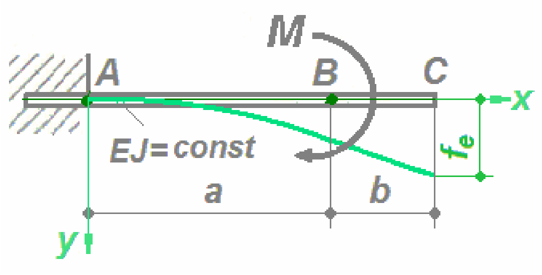
---

* Autorem instrukcji jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH. Instrukcja stanowi przedmiot prawa autorskiego określonego w Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. 1994 r. Nr 24 poz.83 z późn. zmianami). Autor nie wyraża zgody na inne wykorzystywanie instrukcji niż podane w jej przeznaczeniu.

k_g - naprężenie dopuszczalne na zginanie dla materiału belki,

W_g - wskaźnik wytrzymałości na zginanie przekroju poprzecznego belki prostopadłego do osi $\boldsymbol{x}$.

2.2. Belka jednostronnie utwierdzona, obciążona jednym momentem zewnętrznym czynnym



Warunek sztvwności belki:

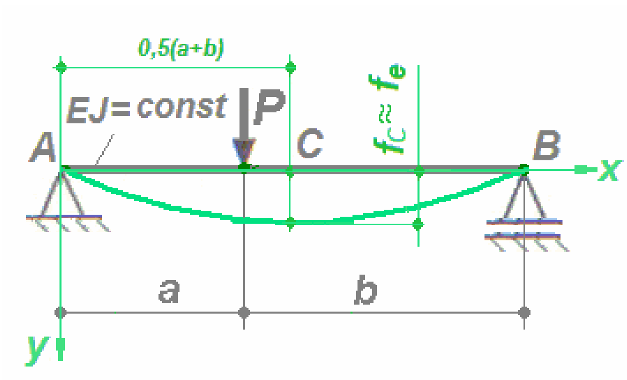
$$f_e = \frac{M\cdot a}{2\cdot EJ}\cdot(a+2\cdot b)\le f_{dop}$$

Ugięcie krytyczne belki:

$$f_K = \frac{a\cdot(a+2b)\cdot k_g\cdot W_g}{2EJ}$$

2.3. Belka swobodnie podparta, obciążona jedną siłą czynną

2.3.1. Przypadek, gdy $\boldsymbol{a \le 0{,}5(a+b)}$



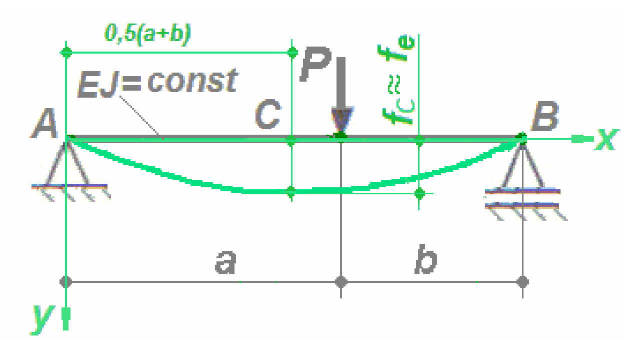
Warunek sztywności belki

$$f_e = \frac{P\cdot a}{48\cdot EJ}\cdot\left[3\cdot(a+b)^2 - 4\cdot a^2\right]\le f_{dop}$$

Ugięcie krytyczne belki:

$$f_K = \frac{(a+b)\cdot k_g\cdot W_g}{48\cdot b\cdot EJ}\cdot\left[3\cdot(a+b)^2 - 4\cdot a^2\right]$$

2.3.2. Przypadek, gdy $\boldsymbol{a > 0{,}5(a+b)}$



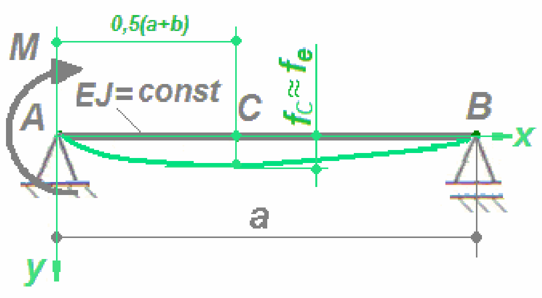
Warunek sztywności belki

$$f_e = \frac{P\cdot b}{48\cdot EJ}\cdot\left[3\cdot(a+b)^2 - 4\cdot b^2\right]\le f_{dop}$$

Ugięcie krytyczne belki:

$$f_K = \frac{(a+b)\cdot k_g\cdot W_g}{48\cdot a\cdot EJ}\cdot\left[3\cdot(a+b)^2 - 4\cdot b^2\right]$$

2.4. Belka swobodnie podparta, obciążona jednym momentem czynnym działającym na podporze



Warunek sztywności belki:

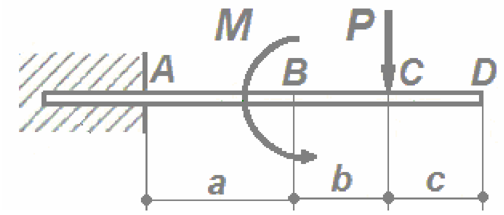
$$f_e = \frac{M\cdot a^2}{9\sqrt{3}\cdot EJ}\le f_{dop}$$

Ugięcie krytyczne belki:

$$f_K = \frac{a^2\cdot k_g\cdot W_g}{9\sqrt{3}\cdot EJ}$$

Część II. Przykłady obliczeniowe

1. Przykład obliczeniowy 1.



Rys. 2.

Dla belki o schemacie obliczeniowym jak na rys. 2 sprawdzić warunek sztywności zadany jako f_{dop} = 0,8 mm. Obliczenia wykonać dla danych: M = 20 kNm, P = 10 kN, a = 1 m, b = c = 0,5 m, $E = 2{,}1\cdot10^5$ MPa, $J = 11260$ cm^4, k_g = 150 MPa, W_g = 938 cm^3.

1.1. Sprawdzenie ugięcia dopuszczanego belki ze względu na jej ugięcie krytyczne

$$f_K = \left|f_{KM} + f_{KP}\right|$$

gdzie:

$$f_{KM} = \frac{a\cdot[a+2\cdot(b+c)]\cdot k_g\cdot W_g}{2\cdot EJ} = \frac{1\cdot[1+2\cdot(0{,}5+0{,}5)]\cdot150\cdot10^6\cdot938\cdot(10^{-2})^3}{2\cdot2{,}1\cdot10^5\cdot10^6\cdot11260\cdot(10^{-2})^4} = 8{,}9\cdot10^{-3}\,m = 8{,}9\,mm$$

$$f_{KP} = -\frac{(a+b)\cdot[2(a+b)+3c]\cdot k_g\cdot W_g}{6EJ} =$$

$$= -\frac{(1+0{,}5)\cdot[2(1+0{,}5)+3\cdot0{,}5]\cdot150\cdot10^6\cdot938\cdot(10^{-2})^3}{6\cdot2{,}1\cdot10^5\cdot10^6\cdot11260\cdot(10^{-2})^4} = -6{,}7\cdot10^{-3}\,m = -6{,}7\,mm$$

$$f_K = \left|f_{KM} + f_{KP}\right| = \left|8{,}9\,mm - 6{,}7\,mm\right| = 2{,}2\,mm$$

Ponieważ zadane ugięcie dopuszczalne f_{dop} = 0,8 mm obliczanej belki jest mniejsze niż jej ugięcie krytyczne f_K = 2,2 mm, należy sprawdzić warunek sztywności tej belki.

1.2. Sprawdzenie warunku sztywności belki

Warunek sztywności belki ze względu na maksymalne ugięcie tej belki będzie spełniony, gdy:

$$f_e = \left|f_{Me} + f_{Pe}\right| \le f_{dop}$$

gdzie:

$$f_{Me} = \frac{Ma}{2EJ}\cdot[a+2(b+c)] = \frac{20\cdot10^3\cdot1}{2\cdot2{,}1\cdot10^5\cdot10^6\cdot11260\cdot(10^{-2})^4}\cdot[1+2\cdot(0{,}5+0{,}5)] = 1{,}27\cdot10^{-3}\;m = 1{,}27\;mm$$

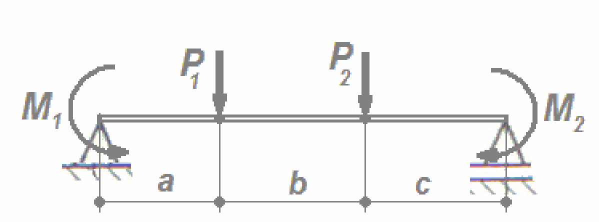
$$f_{Pe} = -\frac{P\cdot(a+b)^2}{6\cdot EJ}[2\cdot(a+b)+3c] =$$

$$= -\frac{10\cdot10^3\cdot(1+0{,}5)^2}{6\cdot2{,}1\cdot10^5\cdot10^6\cdot11260\cdot(10^{-2})^4}[2\cdot(1+0{,}5)+3\cdot0{,}5] = -0{,}71\cdot10^{-3}\;m = -0{,}71\,mm$$

$$f_e = \left|f_{Me} + f_{Pe}\right| = \left|1{,}27\,mm - 0{,}71\,mm\right| = 0{,}56\,mm$$

Ponieważ ugięcie ekstremalne analizowanej belki f_e = 0,56 mm jest mniejsze niż zadane dla niej ugięcie dopuszczalne f_{dop} = 0,8 mm, warunek sztywności tej belki jest spełniony.

2. Przykład obliczeniowy 2.



Rys.3

Dla belki o schemacie obliczeniowym jak na rys. 3 sprawdzić warunek sztywności zadany jako: $\boldsymbol{f_{dop}}$ = 1,5 mm. Przyjąć dane: $\boldsymbol{M_1}$ = 50 kNm, $\boldsymbol{M_2}$ =30 kNm, $\boldsymbol{P_1}$ = 10 kN, $\boldsymbol{P_2}$ = 20 kN, ***a*** = ***b*** =1 m, ***c*** = 1,5 m, ***E*** = 2,1·10^5 MPa, ***J*** = 11260 cm^{4}., $\boldsymbol{k_g}$ = 150 MPa, $\boldsymbol{W_g}$ = 938 cm^3.

2.1. Sprawdzenie ugięcia dopuszczanego belki ze względu na jej ugięcie krytyczne

$$f_K = \left| f_{KM1} + f_{KM2} + f_{KP1} + f_{KP2} \right|$$

gdzie:

$$f_{KM1} = f_{KM2} = -\frac{(a+b+c)^2 \cdot k_g \cdot W_g}{9\sqrt{3} \cdot EJ} = -\frac{(1+1+1{,}5)^2 \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot 938 \cdot (10^{-2})^3}{15{,}59 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 11260 \cdot (10^{-2})^4} = -4{,}7 \cdot 10^{-3}\ m = -4{,}7\ mm$$

$$f_{KP1} = \frac{(a+b+c) \cdot k_g \cdot W_g}{48 \cdot (b+c) \cdot EJ} \cdot \left[3 \cdot (a+b+c)^2 - 4a^2 \right] =$$

$$= \frac{(1+1+1{,}5) \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot 938 \cdot (10^{-2})^3}{48 \cdot (1+1{,}5) \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 11260 \cdot (10^{-2})^4} \cdot \left[3 \cdot (1+1+1{,}5)^2 - 4 \cdot 1^2 \right] = 5{,}6 \cdot 10^{-3}\ m = 5{,}7\ mm$$

$$f_{KP2} = \frac{(a+b+c) \cdot k_g \cdot W_g}{48 \cdot (a+b) \cdot EJ} \cdot \left[3 \cdot (a+b+c)^2 - 4 \cdot c^2 \right] =$$

$$= \frac{(1+1+1{,}5) \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot 938 \cdot (10^{-2})^3}{48 \cdot (1+1) \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 11260 \cdot (10^{-2})^4} \cdot \left[3 \cdot (1+1+1{,}5)^2 - 4 \cdot 1{,}5^2 \right] = 5{,}8 \cdot 10^{-3}\ m = 5{,}8\ mm$$

$$f_K = \left| f_{KM1} + f_{KM2} + f_{KP1} + f_{KP2} \right| = \left| -4{,}7\ mm - 4{,}7\ mm + 5{,}6\ mm + 5{,}8\ mm \right| = 2{,}0\ mm$$

Ponieważ zadane ugięcie dopuszczalne $\boldsymbol{f_{dop}}$ = 1,5 mm obliczanej belki jest mniejsze niż jej ugięcie krytyczne $\boldsymbol{f_K}$ = 2,0 mm, należy sprawdzić warunek sztywności tej belki.

2.2. Sprawdzenie warunku sztywności belki ze względu na maksymalne ugięcie tej belki.

Warunek sztywności belki ze względu na maksymalne ugięcie tej belki będzie spełniony, gdy:

$$f_e = \left| f_{M_{1e}} + f_{M_{2e}} + f_{P_{1e}} + f_{P_{2e}} \right| \le f_{dop}$$

gdzie:

$$f_{M_{1e}} = -\frac{M_1 \cdot (a+b+c)^2}{9\sqrt{3} \cdot EJ} = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot (1+1+1{,}5)^2}{15{,}59 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 11260 \cdot (10^{-2})^4} = -1{,}66 \cdot 10^{-3}\ m = -1{,}66\ mm$$

$$f_{M_{2e}} = -\frac{M_2 \cdot (a+b+c)^2}{9\sqrt{3} \cdot EJ} = -\frac{30 \cdot 10^3 \cdot (1+1+1{,}5)^2}{15{,}59 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 11260 \cdot (10^{-2})^4} = -1{,}00 \cdot 10^{-3}\ m = -1{,}00\ mm$$

$$f_{P_{1e}} = \frac{P_1 \cdot a}{48 \cdot EJ} \cdot \left[3 \cdot (a+b+c)^2 - 4 \cdot a^2\right] = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1}{48 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 11260 \cdot (10^{-2})^4} \cdot \left[3 \cdot (1+1+1{,}5)^2 - 4 \cdot 1^2\right] =$$

$$= 0{,}29 \cdot 10^{-3}\ m = 0{,}29\ mm$$

$$f_{P_{2e}} = \frac{P_2 \cdot c}{48 \cdot EJ} \cdot \left[3 \cdot (a+b+c)^2 - 4 \cdot c^2\right] = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1}{48 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 11260 \cdot (10^{-2})^4} \cdot \left[3 \cdot (1+1+1{,}5)^2 - 4 \cdot 1{,}5^2\right] =$$

$$= 0{,}49 \cdot 10^{-3}\ m = 0{,}49\ mm$$

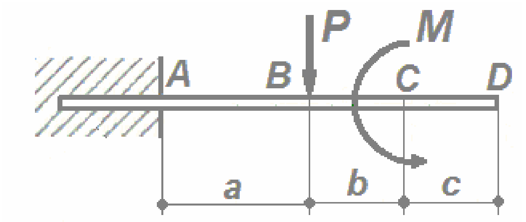
$$f_e = \left| f_{M_{1e}} + f_{M_{2e}} + f_{P_{1e}} + f_{P_{1e}} \right| = \left| -1{,}66\ mm - 1{,}00\ mm + 0{,}29\ mm + 0{,}49\ mm \right| = 1{,}88\ mm$$

Ponieważ ugięcie ekstremalne analizowanej belki f_e = 1,88 mm jest większe niż zadane dla niej ugięcie dopuszczalne f_{dop} = 1,5 mm, warunek sztywności tej belki **nie jest spełniony**.

.

Część III. Zadania domowe

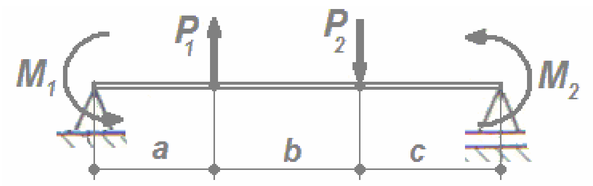
Zadanie domowe 1.



Rys.4**.**

Dla belki o schemacie obliczeniowym jak na rys. 4 sprawdzić warunek sztywności zadany jako f_{dop} = 0,8 mm. Pozostałe dane potrzebne do obliczeń przyjąć z przykładu obliczeniowego 1.

Zadanie domowe 2.



Rys.5.

Dla belki o schemacie obliczeniowym jak na rys. 5 sprawdzić warunek sztywności zadany jako: f_{dop} = 1,5 mm. Pozostałe dane potrzebne do obliczeń przyjąć z przykładu obliczeniowego 2.

Koniec instrukcji

Uwaga. Czas prezentacji należy ograniczyć do 35 minut.