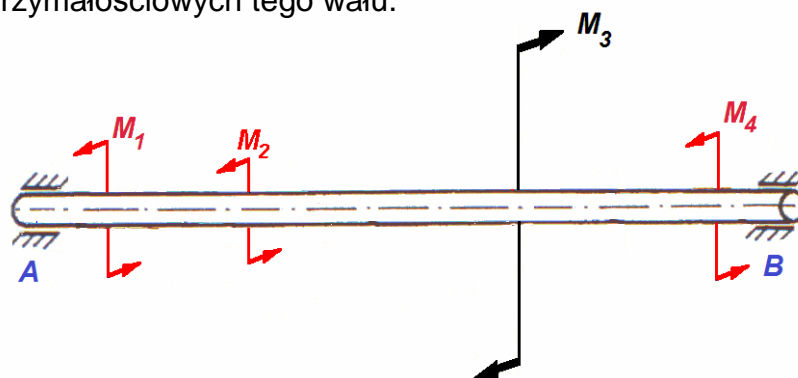


**Instrukcja przygotowania i realizacji scenariusza dotyczącego ćwiczenia T5
z przedmiotu "Wytrzymałość materiałów", przeznaczona dla studentów II roku studiów
stacjonarnych I stopnia w kierunku Energetyka na Wydz. Energetyki i Paliw ***

Treść ćwiczenia **T5**: Obliczanie wytrzymałościowe prętów kołowych skręcanych oraz sprężyn śrubowych.

Część I. Sprawdzanie warunków bezpieczeństwa i sztywności dla prętów kołowych skręcanych

1. Kiedy pręt kołowy (o przekroju kołowym) **jest skręcany**?: wtedy, gdy siły zewnętrzne zadane na pręt można sprowadzić do par sił działających w różnych płaszczyznach prostopadłych do jego osi.
2. Przykład techniczny pręta skręcanego: **Wał maszynowy** (rys.1). Wał maszynowy to element mechaniczny maszyny, najczęściej pręt kołowy, który przejmuje obrotowy moment z silnika i przekazuje go do poszczególnych zespołów maszyny wykonujących określoną pracę. Aby to przekazywanie było bezpieczne, wał musi bezpiecznie przenosić określone momenty **wewnętrzne skręcające**, których rozkład wzdłuż długości wału wyznacza się w pierwszym kroku obliczeń wytrzymałościowych tego wału.



Rys.1.

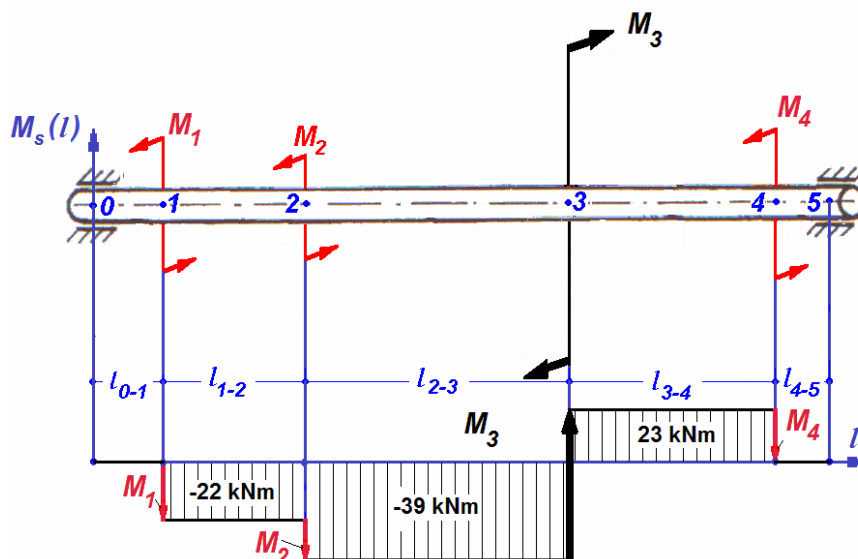
Rozkład wzdłuż długości wału **momentów wewnętrznych skręcających** ten wał wyznacza się najczęściej przy następujących założeniach:

- 1) Moment obrotowy jako moment zewnętrzny wału zadawany przez silnik, jest nazywany **momentem napędowym** (moment M_3 na rys. 1), a momenty obrotowe jako momenty zewnętrzne wału przekazywane do zespołów maszyny, nazywane są **momentami oporowymi** (momenty M_1 , M_2 , M_4 na rys. 1).
- 2) Momenty napędowe uważa się za dodatnie, a momenty oporowe - za ujemne.
- 3) Moment **wewnętrzny skręcający** wał w rozpatrywanym przekroju tego wału jest równy sumie algebraicznej momentów działających na wał po jednej stronie tego przekroju.
- 4) Pomija się **momenty tarcia** występujące w łożyskach wału (punkty **A** i **B** na rys.1).
- 5) Suma algebraiczna wszystkich momentów zewnętrznych wału jest równa zero.

* Autorem instrukcji jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH. Instrukcja stanowi przedmiot prawa autorskiego określonego w Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. 1994 r. Nr 24 poz.83 z późn. zmianami). Autor nie wyraża zgody na inne wykorzystywanie instrukcji niż podane w jej przeznaczeniu.

3. **Przykład obliczeniowy:** Dla wału jak na rys. 1 wyznaczyć rozkład $M_s(l)$ wzdłuż długości wału **momentów wewnętrznych skręcających**. Obliczenia wykonać dla danych: $M_1 = 22$ kNm, $M_2 = 17$ kNm, $M_3 = 62$ kNm, $M_4 = 23$ kNm.

1) Schemat obliczeniowy rozkładu $M_s(l)$ (rys.2):



Rys. 2

2) Moment wewnętrzny skręcający wał w przekrojach prostopadłych do osi wału, usytuowanych na lewo od punktu **1** oraz przynależnych do odcinka l_{0-1} :

$$M_{s(0-1)} = 0$$

3) Moment wewnętrzny skręcający wał w przekrojach prostopadłych do osi wału, usytuowanych na lewo od punktu **2** oraz przynależnych do odcinka l_{1-2} :

$$M_{s(1-2)} = -M_1 = -22 \text{ kNm}$$

4) Moment wewnętrzny skręcający wał w przekrojach prostopadłych do osi wału, usytuowanych na lewo od punktu **3** oraz przynależnych do odcinka l_{2-3} :

$$M_{s(2-3)} = -M_1 - M_2 = -22 - 17 = -39 \text{ kNm}$$

5) Moment wewnętrzny skręcający wał w przekrojach prostopadłych do osi wału, usytuowanych na lewo od punktu **4** oraz przynależnych do odcinka l_{3-4} :

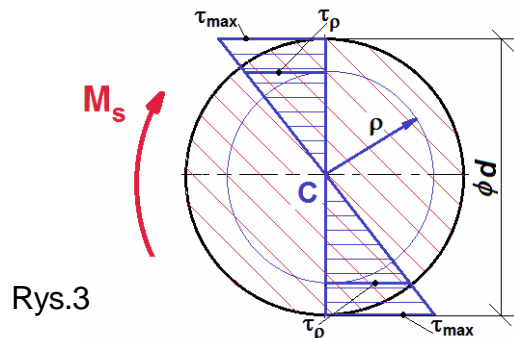
$$M_{s(3-4)} = -M_1 - M_2 + M_3 = -22 - 17 + 62 = 23 \text{ kNm}$$

6) Moment wewnętrzny skręcający wał w przekrojach prostopadłych do osi wału, usytuowanych na lewo od punktu **5** oraz przynależnych do odcinka l_{4-5} :

$$M_{s(4-5)} = -M_1 - M_2 + M_3 - M_4 = -22 - 17 + 62 - 23 = 0$$

4. Warunek bezpieczeństwa dla prętów kołowych skręconych

- 1) Rozkład naprężeń w przekroju kołowym pręta prostopadłym do jego osi oraz warunek bezpieczeństwa tego przekroju:



Rys.3

$$\tau_p = \frac{M_s}{J_o} \cdot \rho, \quad J_o = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{J_o} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_s}{W_o} \leq k_s, \quad W_o = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

M_s - moment wewnętrzny skręcający w przekroju kołowym pręta,

J_o - główny centralny moment biegunowy bezwładności przekroju,

ρ - odległość analizowanego punktu przekroju od środka ciężkości C tego przekroju,

τ_p - naprężenie styczne wywołane przez moment M_s w punkcie przekroju usytuowanym w odległości ρ od od środka ciężkości C tego przekroju,

d - średnica pręta,

τ_{\max} - maksymalne naprężenie styczne wywołane przez moment M_s w przekroju pręta prostopadłym do jego osi,

W_o - wskaźnik wytrzymałości przekroju pręta na skręcanie,

k_s - naprężenie dopuszczalne materiału pręta na skręcanie.

5. **Przykład obliczeniowy:** Sprawdzić warunek bezpieczeństwa wału maszynowego (rys. 2) na skręcanie, jeżeli $d_{1-2} = d_{3-4} = 100$ mm, $d_{2-3} = 120$ mm, $k_s = 120$ MPa.

- 1) Ponieważ $\frac{|M_{s(2-3)}|}{M_{s(3-4)}} = 1,696 < \left(\frac{d_{2-3}}{d_{3-4}}\right)^3 = 1,728$, sprawdzenie należy wykonać dla odcinka 3-4.

- 2) Sprawdzenie warunku bezpieczeństwa:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{s(3-4)}}{W_{o(3-4)}} = \frac{16 \cdot M_{s(3-4)}}{\pi \cdot (d_{3-4})^3} = \frac{16 \cdot 23 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (100 \cdot 10^{-3})^3} = 117,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 117,2 \text{ MPa} < k_s = 120 \text{ MPa}$$

Warunek bezpieczeństwa wału na skręcanie jest spełniony.

6. Warunek sztywności dla prętów kołowych skręconych

- 1) **Definicja opisowa warunku:** Całkowity kąt obliczeniowy skręcenia pręta, spowodowany działaniem na ten pręt określonych momentów zewnętrznych, nie może przekroczyć dopuszczalnej wartości takiego kąta.

- 2) **Definicja algebraiczna warunku:**

$$\varphi_c = \varphi_{1-2} + \varphi_{2-3} + \dots + \varphi_{i-j} + \dots + \varphi_{(n-1)-n} \leq \varphi_{\text{dop}}, \quad \varphi_{i-j} = \frac{M_{i-j} \cdot l_{i-j}}{G \cdot J_{o(i-j)}}$$

φ_c - całkowity kąt obliczeniowy skręcenia pręta,

φ_{dop} - dopuszczalny kąt całkowity skręcenia pręta,

M_{i-j} - wewnętrzny moment skręcający pręt, stały na odcinku $i-j$ tego pręta,

J_{oi-j} - główny centralny moment biegunowy bezwładności pręta stały na odcinku $i-j$ tego pręta,

l_{i-j} - długość odcinka $i-j$ pręta,

G - moduł sprężystości postaciowej (Kirchhoffa) materiału pręta.

7. Przykład obliczeniowy: Sprawdzić warunek sztywności wału maszynowego (rys. 2) na skręcanie, jeżeli: $l_{1-2} = 400$ mm, $l_{2-3} = 850$ mm, $l_{3-4} = 650$ mm, $G = 8,5 \cdot 10^4$ MPa, $\varphi_{dop} = 1^\circ$.

1) Kąt skręcenia wału na odcinku 2-3:

$$\varphi_{1-2} = \frac{M_{s(1-2)} \cdot l_{1-2}}{G \cdot J_{o(1-2)}} = \frac{32 \cdot M_{s(1-2)} \cdot l_{1-2}}{G \cdot \pi \cdot (d_{1-2})^4} = \frac{32(-22 \cdot 10^3) \cdot 400 \cdot 10^{-3}}{8,5 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot (100 \cdot 10^{-3})^4} = -0,011 \text{ rd}$$

2) Kąt skręcenia wału na odcinku 3-4:

$$\varphi_{2-3} = \frac{M_{s(2-3)} \cdot l_{2-3}}{G \cdot J_{o(2-3)}} = \frac{32 \cdot M_{s(2-3)} \cdot l_{2-3}}{G \cdot \pi \cdot (d_{2-3})^4} = \frac{32(-39 \cdot 10^3) \cdot 850 \cdot 10^{-3}}{8,5 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot (120 \cdot 10^{-3})^4} = -0,019 \text{ rd}$$

3) Kąt skręcenia wału na odcinku 4-5:

$$\varphi_{3-4} = \frac{M_{s(3-4)} \cdot l_{3-4}}{G \cdot J_{o(3-4)}} = \frac{32 \cdot M_{s(3-4)} \cdot l_{3-4}}{G \cdot \pi \cdot (d_{3-4})^4} = \frac{32(22 \cdot 10^3) \cdot 650 \cdot 10^{-3}}{8,5 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot (100 \cdot 10^{-3})^4} = 0,018 \text{ rd}$$

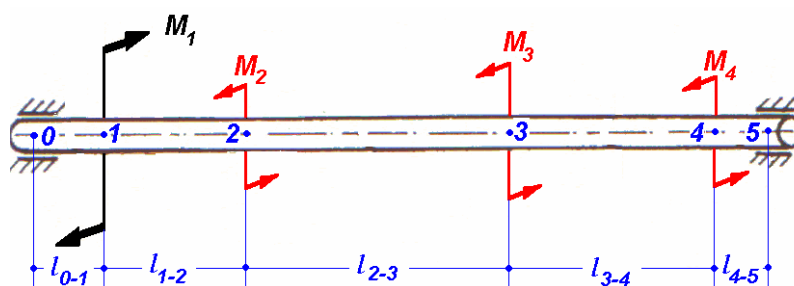
4) Kąt całkowity skręcenia wału:

$$\varphi_c = \varphi_{1-2} + \varphi_{2-3} + \varphi_{3-4} = -0,011 - 0,019 + 0,018 = -0,012 \text{ rd} = 0,69^\circ < \varphi_{dop} = 1^\circ$$

Warunek sztywności wału jest spełniony.

8. Zadanie domowe

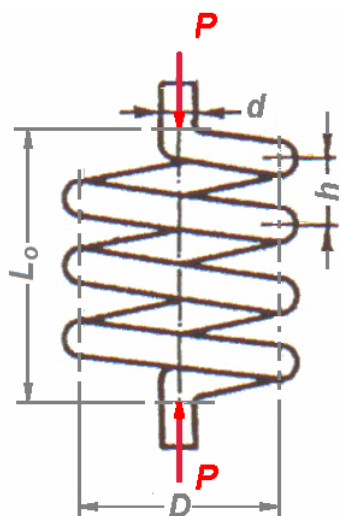
Dla wału jak na rys. 4 wyznaczyć rozkład wzdłuż długości wału momentów wewnętrznych skręcających, a następnie sprawdzić warunek bezpieczeństwa i sztywności. Obliczenia wykonać dla danych: $M_1 = 60$ kNm, $M_2 = 17$ kNm, $M_3 = 25$ kNm, $M_4 = 18$ kNm, $d_{1-2} = 140$ mm, $d_{2-3} = 120$ mm, $d_{3-4} = 100$ mm, $l_{1-2} = 400$ mm, $l_{2-3} = 850$ mm, $l_{3-4} = 650$ mm, $G = 8,5 \cdot 10^4$ MPa, $\varphi_{dop} = 1^\circ$.



Rys.4

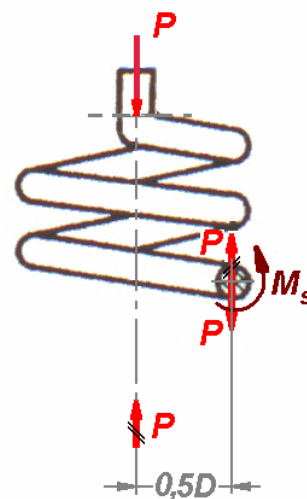
Część II. Sprawdzanie warunków bezpieczeństwa i sztywności sprężyn śrubowych

1. Co to jest sprężyna **śrubowa**? - jest to element mechaniczny wykonany z drutu (pręta okrągłego o małej średnicy **d**), którego oś tworzy regularną linię śrubową o średnicy **D** oraz skoku **h** (rys. 5), i którego tworzywem jest materiał **sprężysto-plastyczny**, uzyskujący - **po obróbce cieplnej sprężyny** - dużą granicę sprężystości.



Rys. 5

- d** - średnica drutu sprężyny
D - średnica linii śrubowej sprężyny
h - skok linii śrubowej sprężyny
L₀ - długość swobodna sprężyny
 $d \leq 0,25 D$, $h \leq 0,5 D$



Rys. 6

2. Warunki konstrukcyjne umożliwiające obliczanie sprężyn śrubowych na skręcanie:

- 1) Średnica drutu **d** nie jest większa niż 25 % średnicy linii śrubowej **D**,
- 2) Sprężyna ma iloraz skoku **h** linii śrubowej do średnicy **D** nie większy niż 0,5.

3. Założenia obliczeniowe:

- 1) O stanie naprężeń w materiale sprężyny decyduje wewnętrzny moment skręcający **M_s** (rys.5), określony jako :

$$M_s = 0,5 \cdot P \cdot D$$

który występuje w przekrojach drutu leżących w płaszczyznach przechodzących przez prostą działania siły **P** oraz wywołuje w tych przekrojach naprężenie styczne τ_p o rozkładzie pokazanym na rys. 3.

- 2) W obliczeniach sprężyn spełniających warunek konstrukcyjny 1) pomija się naprężenia ścinające powodowane w przekrojach drutu przez siłę **P**.

4. Warunek bezpieczeństwa sprężyny śrubowej:

$$\tau_{\max} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} \leq k_s$$

k_s - naprężenie dopuszczalne na skręcanie drutu sprężyny (uzyskane po obróbce cieplnej sprężyny).

5. Warunki sztywności

- 1) **Warunek dla stałej sprężystości C sprężyny:** sprawdza się czy, stała sprężystości **C** spełnia warunek:

$$C_{\min} \leq C = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n \cdot D^3} \leq C_{\max}$$

w którym:

- G** - moduł sprężystości postaciowej (Kirchhoffa) materiału sprężyny,
- d** - średnica drutu sprężyny,
- D** - średnica linii śrubowej sprężyny,
- n** - liczba zwojów sprężyny,
- C_{min}, C_{max}** - wymagany zakres stałej sprężystości sprężyny.

- 2) **Warunek dla ugięcia roboczego U_R sprężyny:** sprawdza się czy, ugięcie robocze sprężyny nie przekracza maksymalnego ugięcia konstrukcyjnego U_K tej sprężyny:

$$U_R = \frac{P}{C} \leq U_K = L_o - (n+1) \cdot d$$

L_o - długość swobodna sprężyny jak na rys. 5.

- 6. Przykład obliczeniowy:** sprawdzić warunek bezpieczeństwa oraz warunki sztywności dla sprężyny śrubowej o parametrach: $d = 8$ mm, $D = 45$ mm, $n = 10$, $G = 8,5 \cdot 10^4$ MPa, $k_s = 180$ MPa, $C_{min} = 0,45$ kN/cm, $C_{max} = 0,50$ kN/cm, $L_o = 120$ mm. Sprężyna ma pracować przy obciążeniu ściskającym $P = 0,8$ kN.

- 1) Sprawdzenie warunków konstrukcyjnych:

$$d = 8 \text{ mm} = 17,8\% D < 25\% D = 11,25 \text{ mm}$$

$$\frac{h}{D} = \frac{L_o}{n \cdot D} = \frac{120}{10 \cdot 45} = 0,27 < 0,5$$

Warunki konstrukcyjne umożliwiające sprawdzenie sprężyny na skręcanie są spełnione.

- 2) Sprawdzenie warunku bezpieczeństwa

$$\tau_{max} = \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot 0,8 \cdot 10^3 \cdot 45 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^3} = 179,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 179,1 \text{ MPa} \leq k_s = 180 \text{ MPa}$$

Warunek bezpieczeństwa sprężyny jest spełniony.

- 3) Sprawdzenie warunku dla stałej sprężystości **C** sprężyny:

$$C = \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot n \cdot D^3} = \frac{8,5 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot (8 \cdot 10^{-3})^4}{8 \cdot 10 \cdot (45 \cdot 10^{-3})^3} = 0,48 \cdot 10^5 \text{ } 0,48 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 0,48 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$$

$$C_{min} = 0,45 \text{ kN/cm} < C = 0,48 \text{ kN/cm} < C_{max} = 0,50 \text{ kN/cm}$$

Warunek dla stałej sprężystości **C** sprężyny jest spełniony.

- 4) Sprawdzenie warunku dla ugięcia roboczego sprężyny:

$$U_R = \frac{P}{C} = \frac{0,8 \cdot 10^3}{0,48 \cdot 10^3 \cdot 10^2} = 17 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 17 \text{ mm}$$

$$U_K = L_o - (n+1) \cdot d = 120 \cdot 10^{-3} - (10+1) \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 32 \text{ mm}$$

$$U_R = 17 \text{ mm} < U_K = 32 \text{ mm}$$

Warunek dla ugięcia roboczego sprężyny jest spełniony

7. Zadanie domowe: Sprężyna śrubowa wykonana z okrągłego drutu ma 10 zwojów oraz wymiary: $d = 10 \text{ mm}$, $D = 50 \text{ mm}$, $L_0 = 150 \text{ mm}$, $n = 10$. Zakładając, że drut sprężyny ma parametry wytrzymałościowe $k_s = 180 \text{ MPa}$, $G = 8,5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, obliczyć dopuszczalną siłę roboczą oraz dopuszczalne ugięcie robocze tej sprężyny.

Koniec instrukcji