Instrukcja przygotowania i realizacji scenariusza dotyczącego ćwiczenia T4 z przedmiotu "Wytrzymałość materiałów", przeznaczona dla studentów II roku studiów stacjonarnych I stopnia w kierunku Energetyka na Wydz. Energetyki i Paliw*

Treść ćwiczenia **T4**: Analiza stanu naprężenia i odkształcenia w materiale elementu konstrukcji

Część I. Analiza stanu naprężenia

1. Podać następujące definicje naprężenia:

- **naprężenie jako wielkość fizyczna:** wektor opisujący rozkład sił wewnętrznych w wybranym przekroju płaskim elementu konstrukcji, odniesionych do jednostki tego przekroju,
- **naprężenie jako wielkość matematyczna:** pochodna funkcji wektorowej **W(A)** opisującej rozkład wypadkowej sił wewnętrznych w wybranym przekroju płaskim **A** elementu konstrukcji:

$$\vec{\mathbf{p}}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{d}\vec{\mathbf{W}}(\mathbf{A})}{\mathbf{dA}}$$

2. Podać powszechnie stosowane nazwy i oznaczenia dotyczące składowych, jakie ma wektor **p** naprężenia określony w zadanym punkcie wybranego przekroju płaskiego, gdy w tym punkcie znajduje się początek prostopadłego układu współrzędnych x, y, z:

- w przypadku, gdy oś **Z** układu jest prostopadła do wybranego przekroju, to naprężenie normalne (wartość składowej wektora **p** prostopadłej do przekroju) oznacza się jako $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}}$, a naprężenia styczne (wartość składowych wektora **p** stycznych do przekroju) oznacza się jako $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{zx}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{zy}}$,
- w przypadku, gdy oś **X** układu jest prostopadła do wybranego przekroju, to naprężenie normalne oznacza się jako $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}$, a naprężenia styczne oznacza się jako $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{xy}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{xz}}$,
- w przypadku, gdy oś **Y** układu jest prostopadła do wybranego przekroju, to naprężenie normalne oznacza się jako $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}$, a naprężenia styczne oznacza się jako $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{yx}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{yz}}$.

3. Podać definicję dla przestrzennego stanu naprężenia w zadanym punkcie elementu konstrukcji:
   - "*zbiór składowych normalnych i stycznych wektora naprężeń określonego dla punktu zadanego jako punkt przecinania się trzech wzajemnie prostopadłych i płaskich przekrojów elementu konstrukcji*"

4. Podać parametry przestrzennego stanu naprężenia w zadanym punkcie elementu konstrukcji:

- trzy naprężenia normalne $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}}$,
- trzy naprężenia styczne $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{xy}}=\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{yx}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{xz}}=\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{zx}}$, $\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{yz}}=\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{zy}}$.

5. Podać dwie główne właściwości stanu naprężenia:

---

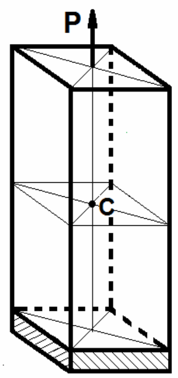
1) Wartości naprężeń $\boldsymbol{\sigma_x}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$, $\boldsymbol{\sigma_z}$, $\boldsymbol{\tau_{xy}}$, $\boldsymbol{\tau_{xz}}$, $\boldsymbol{\tau_{yz}}$ opisujące przestrzenny stan naprężenia w zadanym punkcie elementu konstrukcji obciążonego określonym układem sił zewnętrznych czynnych, zależą od kierunków tego układu względem kierunku naprężeń $\boldsymbol{\sigma_x}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$, $\boldsymbol{\sigma_z}$.
2) Dla każdego punktu elementu konstrukcji obciążonego określonym układem sił zewnętrznych czynnych można określić takie kierunki naprężeń $\boldsymbol{\sigma_x}$, $\boldsymbol{\sigma_y}$, $\boldsymbol{\sigma_z}$, że wszystkie naprężenia styczne $\boldsymbol{\tau_{xy}}$, $\boldsymbol{\tau_{xz}}$, $\boldsymbol{\tau_{yz}}$ w tym punkcie będą równe zero.

6. Podać następującą definicję dla naprężeń głównych i kierunków głównych:
   - **naprężenia główne** to naprężenia normalne $\boldsymbol{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3}$ określone dla zadanego punktu elementu konstrukcji w takich kierunkach **1**, **2**, **3**, wzajemnie prostopadłych, nazywanych **kierunkami głównymi**, dla których wszystkie naprężenia styczne $\boldsymbol{\tau_{xy}}$, $\boldsymbol{\tau_{xz}}$, $\boldsymbol{\tau_{yz}}$ w tym punkcie są równe zero.

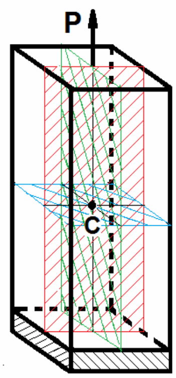
7. Podać następującą klasyfikację stanów naprężenia:
   - **przestrzenny** (trójosiowy) stan naprężenia ma miejsce wtedy, gdy **każde z naprężeń $\boldsymbol{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3}$ jest różne od zera**,
   - **płaski** (dwuosiowy) stan naprężenia występuje wtedy, gdy **dwa z naprężeń $\boldsymbol{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3}$ są różne od zera**,
   - **jednoosiowy** stan naprężenia charakteryzuje się tym, że **jedno z naprężeń $\boldsymbol{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3}$ jest różne od zera**.

8. Przedstawić rozwiązanie następującego zadania:

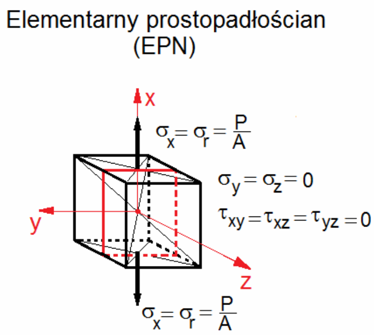
   Pręt prostokątny jak na rys. 1 jest obciążony siłą rozciągającą **P**. Określić największe i najmniejsze naprężenia normalne i styczne w środku objętości **C** tego pręta, jeżeli jego przekrój pręta prostopadły do siły **P** jest równy **A**.



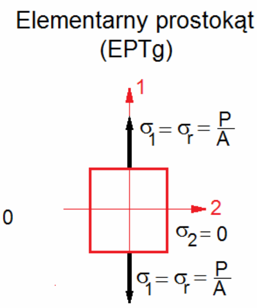
Rys.1



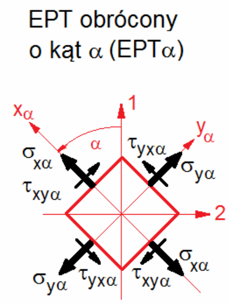
Rys.2



Rys.3



Rys. 4



Rys. 5

1) Punkt **C** wyznacza się jako punkt przecięcia się trzech wzajemnie prostopadłych i płaskich przekrojów pręta, z których jeden jest prostopadły do kierunku siły **P** i leży w połowie długości pręta (rys.2).
2) Punkt **C** zastępuje się elementarnym prostopadłościanem (**EPN**) z układem osi **x**, **y**, z o początku w środku geometrycznym prostopadłościanu, a do jego ścian przykłada się naprężenie normalne $\boldsymbol{\sigma_r}$ wywołane przez siłę **P** (rys.3). Wtedy można stwierdzić, że stan naprężeń w punkcie **C** pręta ma parametry $\boldsymbol{\sigma_x} = \boldsymbol{\sigma_r}$, $\boldsymbol{\sigma_y} = \boldsymbol{\sigma_z} = 0$, $\boldsymbol{\tau_{xy}} = \boldsymbol{\tau_{xz}} = \boldsymbol{\tau_{yz}} = \mathbf{0}$, w związku z czym, naprężenie $\boldsymbol{\sigma_r}$ jest naprężeniem głównym $\boldsymbol{\sigma_1}$ (rys.4), naprężenia główne $\boldsymbol{\sigma_2}$ oraz $\boldsymbol{\sigma_3}$ są równe zero, kierunek działania siły **P** jest kierunkiem głównym **1**, a stan naprężeń wywołany przez tę siłę jest stanem jednoosiowym, który można analizować za pomocą następujących wzorów:

$$\sigma_{x\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\sigma_{y\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy\alpha} = \tau_{yx\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

gdzie:

σ_1 - naprężenie główne działające w kierunku osi 1, przyłożone do **EPTα** w połowie boku prostopadłego do osi **1**,

σ_2 - naprężenie główne działające w kierunku osi 2, przyłożone do **EPTα** w połowie boku prostopadłego do osi **2**,

α **-** kąt między osią główną **1** a osią x_α,

$\sigma_{x\alpha}$ - naprężenie normalne działające w kierunku osi x_α, przyłożone do **EPTα** w połowie w połowie boku prostopadłego do osi x_α,

$\sigma_{y\alpha}$ - naprężenie normalne działające w kierunku osi y_α, przyłożone do **EPTα** w połowie w połowie boku prostopadłego do osi y_α,

$\tau_{xy\alpha}$ **-** naprężenie styczne działające w kierunku osi **yα**, przyłożone do **EPTα** stycznie do boku prostopadłego do osi x_α,

$\tau_{yx\alpha}$ **-** naprężenie styczne działające w kierunku osi **xα**, przyłożone do **EPTα** stycznie do boku prostopadłego do osi y_α.

3) Największe i najmniejsze naprężenia normalne w punkcie **C:**

$$\sigma_{x\alpha} = \sigma_{xmax}, \text{ gdy } \cos 2\alpha = 1, \text{ tj. dla } \alpha = \pm n \cdot 180^\circ$$

$$\sigma_{x\alpha} = \sigma_{xmin}, \text{ gdy } \cos 2\alpha = -1, \text{ tj. dla } \alpha = 90^\circ \pm n \cdot 180^\circ$$

$$\sigma_{y\alpha} = \sigma_{ymax}, \text{ gdy } \cos 2\alpha = -1, \text{ tj. dla } \alpha = 90^\circ \pm n \cdot 180^\circ$$

$$\sigma_{y\alpha} = \sigma_{ymin}, \text{ gdy } \cos 2\alpha = 1, \text{ tj. dla } \alpha = \pm n \cdot 180^\circ$$

4) Największe i najmniejsze naprężenia styczne w punkcie **C:**

$$\tau_{xy\alpha} = \tau_{xymax}, \text{ gdy } \sin 2\alpha = 1, \text{ tj. dla } \alpha = 45^\circ \pm n \cdot 180^\circ$$

$$\tau_{xy\alpha} = \tau_{xymin}, \text{ gdy } \sin 2\alpha = -1, \text{ tj. dla } \alpha = 135^\circ \pm n \cdot 180^\circ$$

5) Zestawienie wyników obliczeń

α	**0°**	**45°**	**90°**	**135°**	**180°**
$\sigma_{x\alpha}$	σ_r	**0,5**σ_r	**0**	**0,5**σ_r	σ_r
$\sigma_{y\alpha}$	**0**	**0,5**σ_r	σ_r	**0,5**σ_r	**0**
$\tau_{xy\alpha}$	**0**	**0,5**σ_r	**0**	**- 0,5**σ_r	**0**

9. Podać temat zadania domowego

Pręt prostokątny jest obciążony siłą ściskająca **P**. Określić największe i najmniejsze naprężenia normalne i styczne w środku objętości **C** tego pręta, jeżeli jego przekrój pręta prostopadły do siły **P** jest równy **A**. **Wskazówka:** $\sigma_r = -\frac{P}{A} < 0$

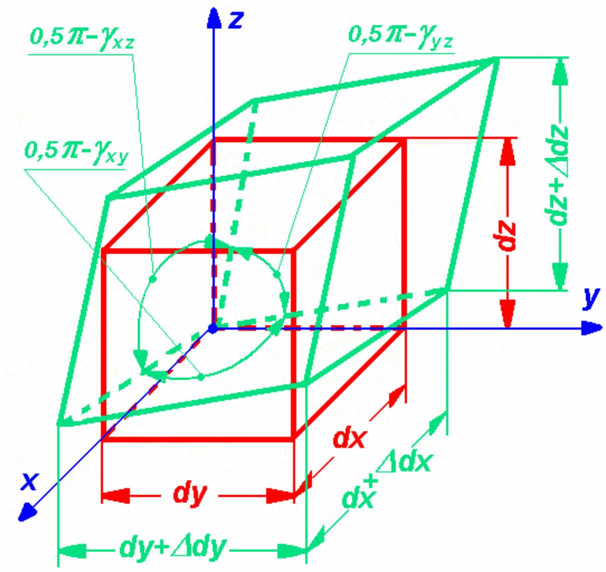
Część II. Analiza stanu odkształcenia

1. Podać definicję odkształcenia dla elementu mechanicznego:

   "**jest to zmiana objętości i postaci elementu wskutek działania sił zewnętrznych**"

2. Podać definicję odkształcenia dla zadanego punktu w objętości elementu mechanicznego:

   "**jest to zmiana objętości i postaci elementarnego prostopadłościanu (EPN) o początkowych wymiarach dx, dy, dz, zachodząca wskutek działania naprężeń** (rys. 6).



Rys. 6

3. Podać założenia przyjmowane do analizy od kształceń:
   - wszystkie powierzchnie zewnętrzne odkształconego **EPN** pozostają płaskie,
   - wydłużenia **Δx**, **Δy**, **Δz** poszczególnych krawędzi **EPN** są wywołane przez naprężenia normalne, a przyrosty $\boldsymbol{\gamma_{xy}}$, $\boldsymbol{\gamma_{xz}}$, $\boldsymbol{\gamma_{yz}}$ kątów pomiędzy tymi krawędziami są wywołane przez naprężenia styczne,
   - wydłużenia względne poszczególnych krawędzi **EPN**:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz},$$

   są nazywane **odkształceniami objętościowymi**, a wartości kątów $\boldsymbol{\gamma_{xy}}$, $\boldsymbol{\gamma_{xz}}$, $\boldsymbol{\gamma_{yz}}$ są nazywane **odkształceniami postaciowymi**.

   - odkształcenia objętościowe powodują zmianę objętości **EPN** bez zmiany jego postaci, (odkształcony objętościowo **EPN** pozostaje prostopadłoscianem), natomiast odkształcenia postaciowe zmieniają **EPN** w graniastosłup, którego objętość jest taka sama jak objętość nieodkształconego **EPN**.

4. Stan odkształcenia w zadanym punkcie objętości elementu mechanicznego określa się za pomocą tzw. **uogólnionego prawa Hooke'a,** które w zapisie algebraicznym ma postać:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_1 - \nu\cdot(\sigma_2+\sigma_3)\right],\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_2 - \nu\cdot(\sigma_1+\sigma_3)\right],\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_3 - \nu\cdot(\sigma_1+\sigma_3)\right]$$

gdzie:

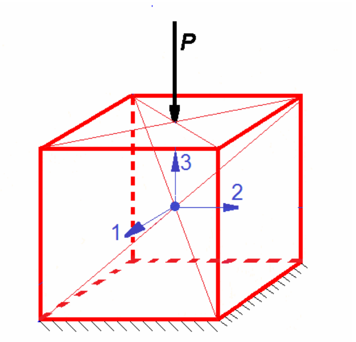
$\boldsymbol{\varepsilon_1}$, $\boldsymbol{\varepsilon_2}$, $\boldsymbol{\varepsilon_3}$, parametry stanu odkształcenia objętościowego w zadanym punkcie elementu mechanicznego, odpowiadające naprężeniom głównym $\boldsymbol{\sigma_1}$, $\boldsymbol{\sigma_2}$, $\boldsymbol{\sigma_3}$ w tym punkcie

E - moduł Younga dla materiału elementu mechanicznego,

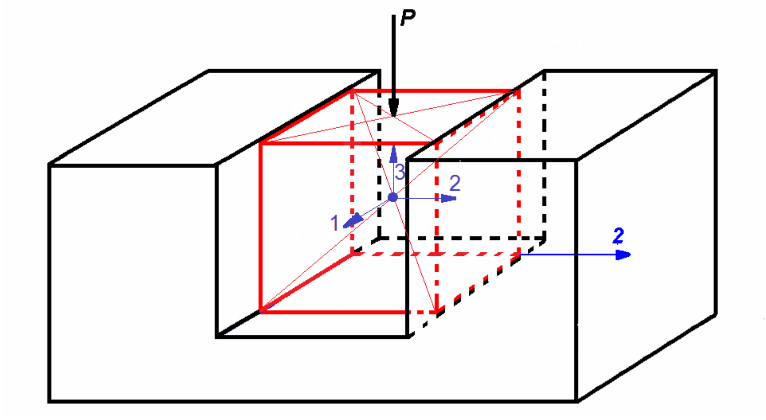
$\boldsymbol{\nu}$ - liczba Poissona dla materiału elementu mechanicznego.

5. Przedstawić rozwiązanie następującego zadania:

Sześcian wykonany ze stopu aluminium (**E** = $0{,}72\cdot10^5$ MPa, $\nu=0{,}26$) jest obciążony siłą **P** wywołującą w jego środku geometrycznym naprężenie σ_3 = -100 MPa. Obliczyć dla tego punktu parametry stanu odkształcenia występującego w stanie swobodnym sześcianu (jak na rys.7), oraz w jego stanie nieswobodnym, kiedy sześcian umieszczono w wycięciu sztywnej płyty (rys.8).



Rys. 7



Rys. 8

1) Obliczenie parametrów stanu odkształcenia dla geometrycznego środka sześcianu swobodnego:

$$\varepsilon_{1s}=\frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_{1s}-\nu\cdot(\sigma_{2s}+\sigma_{3s})\right]=\frac{1}{0{,}72\cdot10^5}\left[0-0{,}26\cdot(0-100)\right]=0{,}36\cdot10^{-3}$$

$$\varepsilon_{2s}=\frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_{2s}-\nu\cdot(\sigma_{1s}+\sigma_{3s})\right]=\frac{1}{0{,}72\cdot10^5}\left[0-0{,}26\cdot(0-100)\right]=0{,}36\cdot10^{-3}$$

$$\varepsilon_{3s}=\frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_{3s}-\nu\cdot(\sigma_{1s}+\sigma_{2s})\right]=\frac{1}{0{,}72\cdot10^5}\left[-100-0{,}26\cdot(0+0)\right]=-1{,}39\cdot10^{-3}$$

2) Obliczenie naprężenia σ_{2n} (dla sześcianu nieswobodnego):

$$\varepsilon_{2n}=0=\frac{1}{E}[\sigma_{2n}-\nu(\sigma_{1n}+\sigma_{3n})]\;\Rightarrow\;\sigma_{2n}=\nu(\sigma_{1n}+\sigma_{3n})=0{,}26\cdot(0-100)=-26\text{ MPa}$$

3) Obliczenie odkształcenia ε_{1n} (dla sześcianu nieswobodnego):

$$\varepsilon_{1n}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{1n}-\nu(\sigma_{2n}+\sigma_{3n})\right]=\frac{1}{0{,}72\cdot10^5}\left[0-0{,}26(-26-100)\right]=0{,}46\cdot10^{-3}$$

4) Obliczenie odkształcenia ε_{3n} (dla sześcianu nieswobodnego):

$$\varepsilon_{3n}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{3n}-\nu(\sigma_{1n}+\sigma_{2n})\right]=\frac{1}{0{,}72\cdot10^5}\left[-100-0{,}26(0-26)\right]=-1{,}3\cdot10^{-3}$$

5) Zestawienie wyników obliczeń

Sześcian	**Parametry stanu naprężenia i odkształcenia**					
	σ_1	ε_1	σ_2	ε_2	σ_3	ε_3
swobodny	**0**	**$0{,}36\cdot10^{-3}$**	**0**	**$0{,}36\cdot10^{-3}$**	**-100 MPa**	**$-1{,}39\cdot10^{-3}$**
nieswobodny	**0**	**$0{,}46\cdot10^{-3}$**	**-26 MPa**	**0**	**-100 MPa**	**$-1{,}30\cdot10^{-3}$**

6. Podać temat zadania domowego

Obliczyć stan naprężenia i odkształcenia dla geometrycznego środka sześcianu swobodnego i nieswobodnego jak na rys. 7 i 8, w przypadku, gdy sześcian będzie wykonany z betonu o parametrach **E** = $0{,}2 \cdot 10^5$, $\boldsymbol{\nu}$ = 0,16.

Koniec instrukcji