

**Instrukcja przygotowania i realizacji scenariusza dotyczącego ćwiczenia T2
z przedmiotu "Wytrzymałość materiałów", przeznaczona dla studentów II roku studiów
stacjonarnych I stopnia w kierunku Energetyka na Wydz. Energetyki i Paliw^{*}**

Treść ćwiczenia T2: Obliczanie wytrzymałościowe prętów obciążonych osiowo (tj. siłami rozciągającymi oraz ściskającymi) - w przypadkach statycznie wyznaczalnych oraz statycznie niewyznaczalnych.

Część I. Warunki wytrzymałościowe bezpieczeństwa i sztywności dla prętów obciążonych osiowo

1. Podać i objaśnić wzory opisujące warunki bezpieczeństwa dla rozciągania lub ściskania pręta wykonanego z materiału sprężysto-plastycznego oraz zdefiniować następujące pojęcia:
 - materiał sprężysto-plastyczny,
 - naprężenie niszczące dla materiału sprężysto-plastycznego,
 - współczynnik bezpieczeństwa,
 - naprężenie dopuszczalne dla materiału sprężysto-plastycznego.
2. Podać i objaśnić wzory opisujące warunki bezpieczeństwa dla rozciągania oraz ściskania pręta wykonanego z materiału sprężysto-kruchego oraz zdefiniować następujące pojęcia:
 - materiał sprężysto-kruchy,
 - naprężenie niszczące materiał sprężysto-kruchy przy rozciąganiu,
 - naprężenie niszczące materiał sprężysto-kruchy przy ściskaniu,
3. Zdefiniować pojęcia:
 - zasada de Saint -Venanta,
 - pręty smukłe,oraz przedstawić ograniczenia wynikające z tych pojęć dla podanych warunków wytrzymałościowych bezpieczeństwa.
4. Przedstawić i objaśnić wzór opisujący warunek sztywności pręta rozciąganego lub ściskanego, podać ograniczenia tego warunku wynikające z prawa Hooke'a oraz zestawić i porównać wartości modułu sprężystości wzdłużnej dla następujących materiałów:
 - stal sprężynowa,
 - stal węglowa konstrukcyjna,
 - żeliwo,
 - stopy aluminium,
 - beton,
 - szkło.

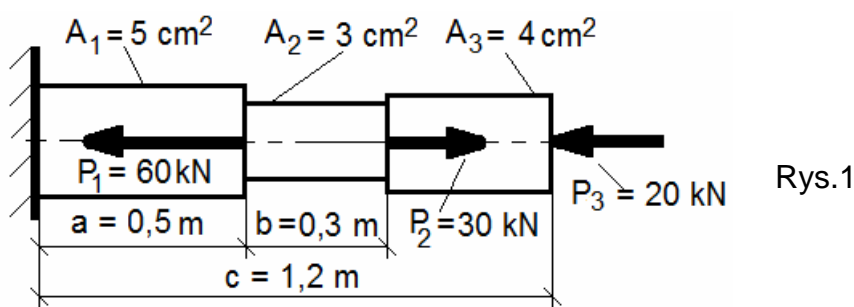
^{*} Autorem instrukcji jest Marek Płachno, prof. ndzw. AGH. Instrukcja stanowi przedmiot prawa autorskiego określonego w Ustawie o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. 1994 r. Nr 24 poz.83 z późn. zmianami). Autor nie wyraża zgody na inne wykorzystywanie instrukcji niż podane w jej przeznaczeniu.

Część II. Obliczanie wytrzymałościowe prętów obciążonych współosiowo jednostronnie utwierdzonych (przypadki statycznie wyznaczalne)

1. Podać następującą definicję zasady superpozycji:

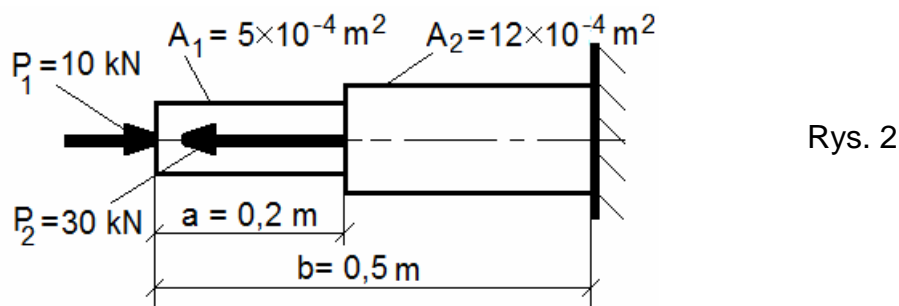
Dowolny skutek wywołany działaniem kilku obciążeń jest równy sumie skutków spowodowanych przez każde z tych obciążeń działających oddzielnie.

2. Pręt jednostronnie utwierdzony i obciążony osiowo jak na rys. 1, jest wykonany z materiału sprężysto-krucho o parametrach $k_c = 130 \text{ MPa}$, $k_r = 30 \text{ MPa}$, $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, oraz ma dopuszczalne wydłużenie określone jako $\Delta l_{dop} = -0,5 \div 0,5 \text{ mm}$. Wykorzystując zasadę superpozycji przedstawić tok oraz wyniki obliczeń wytrzymałościowych tego pręta.



Do tego celu zastosować sposób postępowania przedstawiony w poniższym przykładzie:

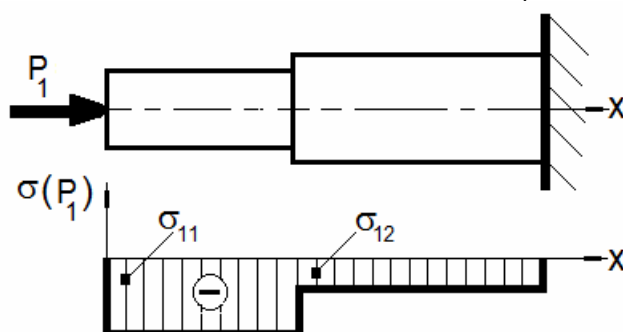
Sprawdzić warunek bezpieczeństwa i warunek sztywności dla pręta obciążonego siłami osiowymi P_1 i P_2 , pokazanego na rys. 2. Pręt jest wykonany z materiału sprężysto-krucho o parametrach $k_c = 65 \text{ MPa}$, $k_r = 15 \text{ MPa}$, $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ oraz ma wydłużenie dopuszczalne $\Delta l_{dop} = -0,1 \div 0,1 \text{ mm}$.



1) Wyznaczenie rozkładu naprężeń wzdłuż długości pręta spowodowanych siłami P_1 i P_2 .

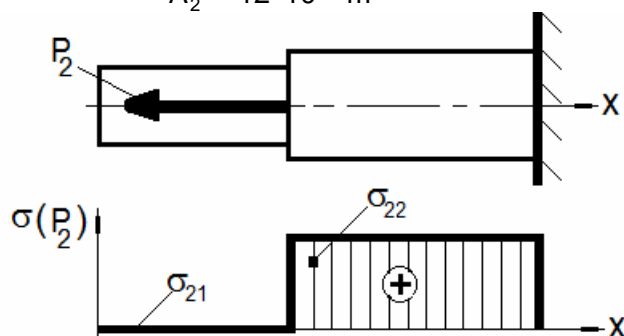
- naprężenia spowodowane przez siłę P_1 działającą oddzielnie:

$$\sigma_{11} = -\frac{P_1}{A_1} = -\frac{10 \cdot 10^3 \text{ N}}{5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = -2 \cdot 10^7 \text{ Pa} = -20 \text{ MPa}, \quad \sigma_{12} = -\frac{P_1}{A_2} = -\frac{10 \cdot 10^3 \text{ N}}{12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = -0,83 \cdot 10^7 \text{ Pa} = -8,3 \text{ MPa}$$



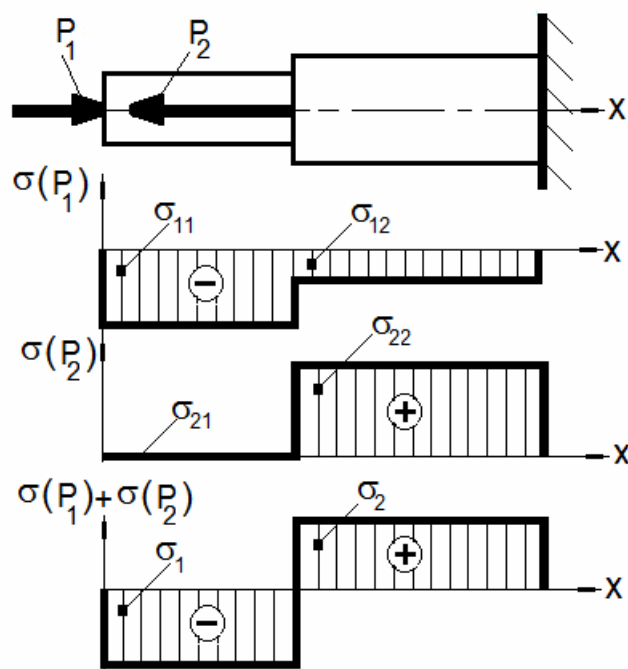
- *naprężenia spowodowane przez siłę P_2 działającą oddzielnie:*

$$\sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{22} = \frac{P_2}{A_2} = \frac{30 \cdot 10^3 \text{ N}}{12 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 25 \text{ MPa}$$



- *naprężenia spowodowane przez siły P_1 i P_2 działające równocześnie:*

$$\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{21} = -20 \text{ MPa} + 0 = -20 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_{12} + \sigma_{22} = -8,3 \text{ MPa} + 25 \text{ MPa} = 16,7 \text{ MPa}$$



2) Sprawdzenie warunku bezpieczeństwa

- *dla przekroju A_1 , gdzie występuje ściskanie:*

$$|\sigma_1| = 20 \text{ MPa} < k_c = 65 \text{ MPa}$$

warunek jest spełniony

- *dla przekroju A_2 , gdzie występuje rozciąganie:*

$$\sigma_2 = 16,7 \text{ MPa} > k_r = 15 \text{ MPa} -$$

warunek nie jest spełniony

3) Wyznaczenie wydłużenia doznanego przez pręt wskutek działania sił P_1 i P_2

- *wydłużenie spowodowane przez siłę P_1 działającą oddzielnie:*

$$\Delta l(P_1) = \left(-\frac{P_1 \cdot a}{E \cdot A_1} \right) + \left[-\frac{P_1 \cdot (b-a)}{E \cdot A_2} \right] = \left(-\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,2}{1,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \right) + \left[-\frac{10 \cdot 10^3 \cdot (0,5-0,2)}{1,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-4}} \right] = -0,054 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

- wydłużenie spowodowane przez siłę P_2 działającą oddzielnie:

$$\Delta l(P_2) = \frac{P_2 \cdot (b - a)}{E \cdot A_2} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot (0,5 - 0,2)}{1,2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 0,063 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

- wydłużenie spowodowane przez siły P_1 i P_2 działające równocześnie:

$$\Delta l = \Delta l(P_1) + \Delta l(P_2) = -0,054 \cdot 10^{-3} \text{ m} + 0,063 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,009 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

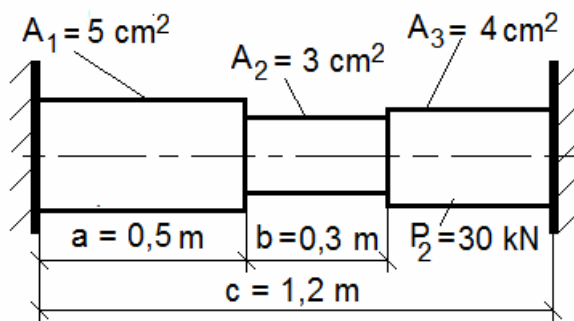
4) Sprawdzenie warunku sztywności

$$\Delta l = 0,009 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,009 \text{ mm} < \Delta l_{\text{dop}} = 0,1 \text{ mm}$$

warunek jest spełniony.

Część III. Obliczanie wytrzymałościowe prętów obciążonych współosiowo obustronnie utwierdzonych (przypadki statycznie niewyznaczalne)

- Wyjaśnić, kiedy pręt obciążony współosiowo stanowi przypadek statycznie niewyznaczalny.
- Co to jest równanie zgodności przemieszczeń?
- Pręt obustronnie utwierdzony jak na rys. 3 doznaje przyrostów temperatury. Przedstawić tok i wyniki obliczeń bezpiecznego przyrostu temperatury Δt pręta, jeżeli materiał pręta ma dopuszczalne naprężenie ściskające $k_c = 150 \text{ MPa}$, moduł $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ oraz współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

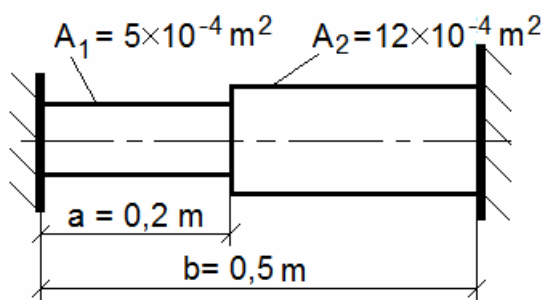


Rys. 3

Do tego celu zastosować sposób postępowania przedstawiony w poniższym przykładzie:

Obliczyć bezpieczny przyrost temperatury Δt pręta jak na rys. 4. Do obliczeń przyjąć dane:

$k_c = 65 \text{ MPa}$, moduł $E = 1,2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ oraz współczynnik rozszerzalności liniowej $\alpha = 1,05 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.



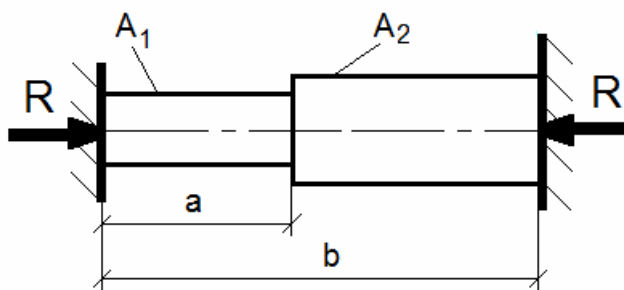
Rys. 4

1) *Równanie zgodności przemieszczeń*

Gdyby pręt nie był dwustronnie utwierdzony, to wskutek przyrostu temperatury Δt uległ by wydłużeniu określonemu jako:

$$\Delta l(\Delta t) = \alpha \cdot b \cdot \Delta t$$

Obustronne utwierdzenie nie dopuszcza do wydłużenia pręta, w związku z czym, w pręcie powstaje osiowa siła ściskająca R , która powoduje skrócenie pręta kompensujące wydłużenie $\Delta l(\Delta t)$.



Na tej podstawie uzyskuje się następujące równanie zgodności przemieszczeń:

$$\frac{R \cdot a}{E \cdot A_1} + \frac{R \cdot (b-a)}{E \cdot A_2} = \alpha \cdot b \cdot \Delta t$$

2) *Obliczenie siły osiowej R:*

$$R = \frac{\alpha \cdot b \cdot \Delta t}{\frac{a}{E \cdot A_1} + \frac{(b-a)}{E \cdot A_2}}$$

3) *Obliczenie naprężeń powodowanych przez siłę R w przekrojach A₁ i A₂ pręta:*

$$\sigma_1 = \frac{R}{A_1} = \frac{\alpha \cdot b \cdot \Delta t}{\frac{a}{E} + \frac{(b-a)}{E} \cdot \frac{A_1}{A_2}}, \quad \sigma_2 = \frac{R}{A_2} = \frac{\alpha \cdot b \cdot \Delta t}{\frac{a}{E} \cdot \frac{A_1}{A_2} + \frac{(b-a)}{E}}$$

4) *Obliczenie bezpiecznego przyrostu temperatury Δt :*

Ponieważ $\sigma_1 > \sigma_2$, to dla obliczenia przyrostu temperatury Δt : uzyskuje się równanie:

$$k_c = \frac{\alpha \cdot b \cdot \Delta t}{\frac{a}{E} + \frac{(b-a)}{E} \cdot \frac{A_1}{A_2}}$$

z którego wylicza się:

$$\Delta t = \frac{k_c}{\alpha \cdot E} \left[\frac{a}{b} + \left(1 - \frac{a}{b} \right) \cdot \frac{A_1}{A_2} \right] = \frac{65}{1,05 \cdot 10^{-5} \cdot 1,2 \cdot 10^5} \left[\frac{0,2}{0,5} + \left(1 - \frac{0,2}{0,5} \right) \cdot \frac{5}{12} \right] = 33,5^\circ \text{K}$$

Uwaga:

Scenariusz należy tak opracować, aby czas jego realizacji podczas ćwiczenia nie przekroczył 50 minut

Koniec instrukcji